Algorithms Seminar 2000–2001,
F. Chyzak (ed.), INRIA, (2002), pp. 171–188.

Available online at the URL
`http://algo.inria.fr/seminars/`.

Aléa discret et mouvement brownien[†]

Philippe Chassaing

Institut Élie Cartan, Université Nancy 1 (France)

March 26 and 27, 2001

Summary by Philippe Chassaing

Les liens entre le mouvement brownien et ses processus dérivés (méandre, pont, excursion) d'une part et d'autre part des objets combinatoires comme les mots de Dyck, les permutations bi-ordonnées, le tri *Shell's sort*, les arbres simples, les facteurs gauches, le hachage ou parking, les animaux dirigés, le graphe aléatoire, la marche aléatoire dans le plan fendu, ..., rendent opportune une revue (forcément partielle) des innombrables propriétés du mouvement brownien.

En combinatoire et analyse d'algorithmes, beaucoup d'asymptotiques de statistiques intéressantes sont familières aux spécialistes du mouvement brownien : la hauteur ou la largeur des arbres simples normalisées convergent en loi vers une loi liée à la fonction θ de Jacobi, connue pour être la loi du maximum de l'excursion brownienne. Dans l'asymptotique des nombres de Wright, dénombrant les graphes connexes à n sommets et k arètes en excès [19], apparaissent les moments de la surface sous l'excursion brownienne, dont la distribution s'exprime à l'aide de la fonction d'Airy[1]. Le profil moyen d'un arbre simple suit asymptotiquement la loi de Rayleigh, qui est la loi du maximum du pont brownien. Le déplacement total dans une table de hachage pleine, est également asymptotiquement distribuée selon une loi d'Airy. Il est tentant de voir ces faits comme les fragments d'un même tableau : la convergence des chemins de Bernoulli (resp. de Dyck) et d'objets analogues vers le mouvement brownien (resp. l'excursion brownienne). Une version arbre en est donnée par Aldous avec sa convergence des arbres simples vers le *continuum random tree*.

À cette premiere explication de l'omniprésence de certaines lois vient s'ajouter le principe d'invariance [7][2] selon lequel la loi limite de différentes fonctionelles d'une marche aléatoire ne dépend que très peu (à un facteur multiplicatif près) de la loi d'un pas élémentaire : ce dernier principe se traduit, par exemple, en informatique fondamentale, par l'apparition de la même loi limite pour la hauteur de différents arbres simples [8, 16], ou encore de la meme loi limite pour le cheminement total d'un arbre binaire ou pour le déplacement total d'une table de hachage pleine.

Pour beaucoup d'autres situations combinatoires (tailles de composantes connexes du graphes aléatoires, *minimum spanning tree*, *random mappings*, cartes planaires, etc.), l'existence d'un objet aléatoire limite est soupçonnée ou avérée, expliquant ainsi les lois limites déjà observées, fournissant éventuellement de nouveaux résultats asymptotiques en combinatoire et en analyse d'algorithmes, et posant de nouvelles questions sur l'omniprésent mouvement brownien. Il est sage pour un mini-cours de se limiter à la convergence d'objets combinatoires très basiques : chemins de Dyck (bilatères ou non) et facteurs gauches, tous étant plus généralement des chemins de Bernoulli, vers le mouvement brownien et ses avatars, excursion brownienne, méandre et pont. Le mouvement

---

[†]Notes de cours pour le cours donné pendant le groupe de travail ALÉA'01 à Luminy (France).

[1]Pour un aperçu agréable du lien entre mouvement brownien et fonctions spéciales, voir [1].

[2]cf. [5], lire l'introduction.

brownien, ses propriétés, et le théorème de Donsker requièrent une trentaine d'heures de cours pour un traitement rigoureux ; j'éviterai donc les démonstrations, et renverrai largement à la bibliographie abondante sur le sujet, en particulier à [17, 2, 12].

Plan.

1. Différents types de chemins aléatoires
2. Changement d'échelle brownien (*Brownian scaling*) et convergence faible
3. Convergence faible : définition et premières conséquences
4. Convergence faible : critères et autres caractérisations
5. Propriétés du mouvement brownien
6. Décompositions remarquables des trajectoires du mouvement brownien
7. Diverses propriétés de l'excursion brownienne normalisée, du pont et du méandre brownien
8. Conclusion

Les sections 6 à 8 seront rédigées dans un document ultérieur.

1. Différents types de chemins aléatoires

Définition (Chemins de Bernoulli). Un *chemin de Bernoulli* est un chemin sur le réseau engendré par NE $= (1,1)$ et SE $= (1,-1)$, partant de $(0,0)$, admettant comme pas élémentaires précisément les pas NE et SE. Il y a 2^n chemins de Bernoulli de longueur n.

Définition (Chemins de Dyck). Un *chemin de Dyck* de longueur $2n$ est un chemin de Bernoulli de longueur $2n$ qui se termine au point (2n,0) et reste positif ou nul sur toute sa longueur. Il y a

$$C_n = \frac{\binom{2n+1}{n}}{2n+1}$$

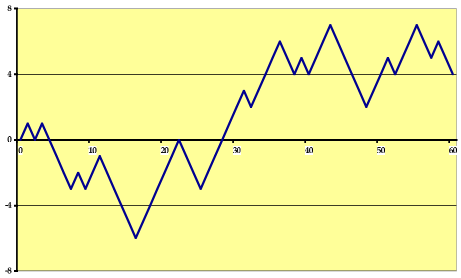
chemins de Dyck de longueur $2n$. Un mot de Dyck est la description d'un chemin de Dyck par la suite de ses pas, *i. e.* un mot formé d'autant de caractères 'M' (pour « montées ») que de caractères 'D' (pour « descentes »), et dont n'importe quel préfixe contient au moins autant de 'M' que de 'D'. Il y a une bijection privilégiée (entre mots et chemins), alors notons indifféremment $\mathcal{B}_{2n}^{\oplus}$ l'ensemble des C_n chemins de Dyck de longueur $2n$ ou l'ensemble des C_n mots de Dyck de longueur $2n$.

Définition (Chemins de Dyck bilatères). Un *chemin de Dyck bilatère* de longueur $2n$ est un chemin de Bernoulli de longueur $2n$ qui se termine au point $(2n, 0)$. Il y a $\binom{2n}{n}$ chemins de Dyck bilatères de longueur $2n$.

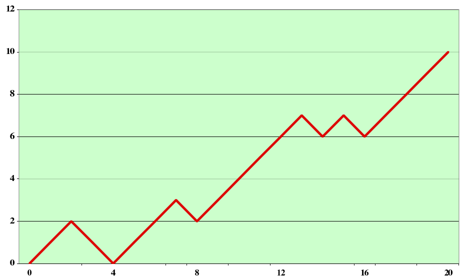
Définition (Facteurs gauches). Un *facteur gauche* de longueur n est un chemin de Bernoulli de longueur n qui reste positif ou nul tout au long de sa trajectoire. Il y a $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ facteurs gauches de longueur n.

Variables aléatoires correspondantes. Quitte à identifier une fonction et son graphe, on peut voir l'ensemble $\mathcal{B}_n$ des chemins de Bernoulli de longueur n et ses sous ensembles $\mathcal{B}_n^{\oplus}$ (ensemble des chemins de Dyck[3]), $\mathcal{B}_n^{o}$ (ensemble des chemins de Dyck bilatères) et $\mathcal{B}_n^{+}$ (ensemble des facteurs gauches) comme des parties finies de l'espace $\mathcal{C}[\,0,n\,]$ des fonctions continues. On notera ν_n (resp. $\nu_n^{\oplus}$, ν_n^{o}, ν_n^{+}) la mesure de probabilité sur $\mathcal{C}[\,0,n\,]$ uniforme sur $\mathcal{B}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n^{\oplus}$, $\mathcal{B}_n^{o}$, $\mathcal{B}_n^{+}$).

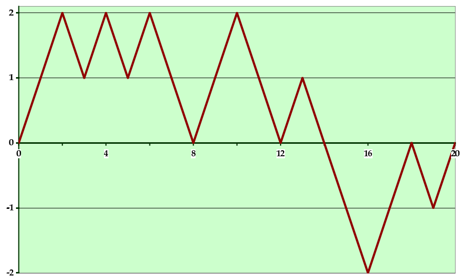
[3]Dans la suite, chaque fois que c'est nécessaire, pour les chemins de Dyck p. e., on sous entendra que n est pair, et dans ce cas on notera $n = 2n'$.



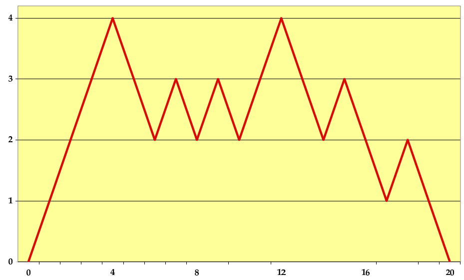
( ) Un chemin de Bernoulli de longueur $n = 60$;



(+) Un facteur gauche de longueur $n = 20$;



(O) Un chemin de Dyck bilatère de longueur $2n = 20$;



($\oplus$) Le chemin de Dyck de longueur $2n = 20$ associé au mot de Dyck MMMMDDMDMDMMDDMDDMDD.

FIGURE 1. Différents types de chemins.

Définition. Dans la suite, une variable aléatoire de loi ν_n (resp. $\nu_n^{\oplus}$, ν_n^o, ν_n^+) sera appelée *marche aléatoire simple symétrique* (resp. *excursion de Bernoulli*, *pont de Bernoulli*, *méandre de Bernoulli*) de longueur n.

Une variable aléatoire X à valeur dans un espace de fonctions, p. e. dans $\mathcal{C}[0,1]$, $\mathcal{C}[0,n]$ ou encore $\mathcal{C}[0,+\infty)$, est souvent appelée *processus stochastique*.

Seule l'appellation « marche aléatoire simple symétrique » est bien établie, les 3 autres étant inspirées d'un vocabulaire bien établi dans le cadre du mouvement brownien, où l'on parle d'*excursion brownienne*, de *pont brownien*, et de *méandre brownien*. Dans la suite, par un abus de langage sur lequel on ne s'attardera pas, on identifiera couramment une suite $u = (u_k)_{0 \leq k \leq n}$ à son prolongement en une fonction f continue linéaire par morceaux sur $[0,n]$, ou encore au graphe de cette dernière fonction. En particulier, les fonctions de $\mathcal{B}_n$ sont bien définies par leurs évaluations en 0, 1, 2, ..., n. La construction usuelle d'une marche aléatoire simple symétrique est plutôt celle de la suite des $n+1$ évaluations :

Définition (Marche aléatoire simple symétrique, définition équivalente)**.** Notons $(Y_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi (on abrègera « indépendantes et de même loi » en i. i. d. dans la suite), avec

$$\mathbf{P}(Y_k = 1) = \mathbf{P}(Y_k = -1) = 1/2,$$

et posons

$$S_0 = 0, \qquad S_k = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k,$$

on dit que $S = (S_k)_{0 \leq k \leq n}$ est la *marche aléatoire simple symétrique* de longueur n.

Remarques.

1. On verra dans la suite que cette construction révèle certaines propriétés cruciales des chemins de Bernoulli, dont le mouvement brownien va hériter par passage à la limite.
2. Il est naturel, dans ce contexte, de définir la marche simple symétrique *pour tout entier non négatif*, *i. e.* de définir un chemin de Bernoulli aléatoire de longueur infinie.
3. Plus généralement, une marche aléatoire $S = (S_k)_{k\geq 0}$ est définie sur un groupe $(G, \oplus)$, p. e. ici $(\mathbb{R}, +)$, par
$$S_k = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_k,$$
les Y_i étant i. i. d., la loi de probabilité commune aux Y_i étant appelée *« pas » de la marche*. On peut par exemple associer aux arbres unaires-binaires aléatoires, ou aux arbres étiquetés aléatoires, une marche aléatoire dont le pas est différent du pas de la marche aléatoire simple symétrique, *i. e.* différent de $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$.

Une fois la marche aléatoire simple symétrique ainsi définie, on peut voir $\nu_n^{\oplus}$ (resp. ν_n^0, ν_n^+) comme des lois conditionelles de cette marche de longueur n, c'est-à-dire que, pour $A \subset \mathcal{C}[\,0,n\,]$,

$$\begin{aligned}
\nu_n(A) &= \frac{\#(A \cap \mathcal{B}_n)}{2^n} = \mathbf{P}(S \in A),\\
\nu_n^{\oplus}(A) &= \frac{\#(A \cap \mathcal{B}_n^{\oplus})}{C_{n'}} = \mathbf{P}(S \in A \mid S_k \geq 0,\ 0 \leq k \leq n \text{ et } S_n = 0),\\
\nu_n^0(A) &= \frac{\#(A \cap \mathcal{B}_n^0)}{\binom{n}{n'}} = \mathbf{P}(S \in A \mid S_n = 0),\\
\nu_n^+(A) &= \frac{\#(A \cap \mathcal{B}_n^+)}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} = \mathbf{P}(S \in A \mid S_k \geq 0,\ 0 \leq k \leq n).
\end{aligned}$$

Ces définitions de ν_n (resp. $\nu_n^{\oplus}$, ν_n^0, ν_n^+) fournissent un algorithme efficace pour la génération d'un chemin de Bernoulli aléatoire, et des algorithmes de rejet parfaitement inefficaces pour la génération des chemins de Dyck (bilatères ou non) ou encore des facteurs gauches.

2. Changement d'échelle brownien (*Brownian scaling*) et convergence faible

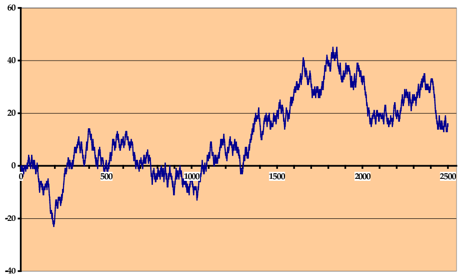
Définition (Changement d'échelle brownien *(Brownian scaling)*). Étant donné une fonction f définie sur un intervalle $[\,a,b\,]$ borné, on note $f^{[\,a,b\,]}$ la fonction définie sur $[\,0,1\,]$ par
$$f^{[\,a,b\,]}(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\, f\big(a + t(b-a)\big).$$
En particulier cette opération envoie bijectivement $\mathcal{C}[\,a,b\,]$ sur $\mathcal{C}[\,0,1\,]$.

Le graphe de $f^{[\,a,b\,]}$ est ainsi obtenu, à partir de celui de f, en multipliant la largeur par un facteur $\frac{1}{b-a}$ et la hauteur par un facteur $\frac{1}{\sqrt{b-a}}$. Bachelier en 1900, ou Einstein en 1905 (dans leur étude respectivement du cours des actions en bourse, et du mouvement, observé par Brown en 1826, de certaines particules en suspension dans un liquide) utilisent explicitement ou implicitement, une propriété remarquable : *le changement d'échelle brownien d'un chemin de Bernoulli de longueur n converge vers un objet limite, quand n tend vers $+\infty$.*

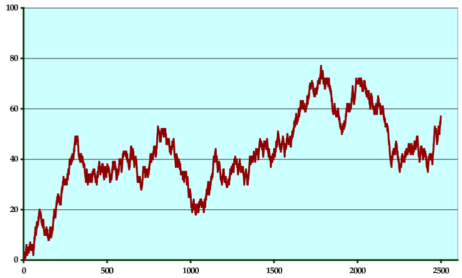
Notons μ_n (resp. $\mu_n^{\oplus}$, μ_n^o, μ_n^+) l'image de ν_n (resp. $\nu_n^{\oplus}$, ν_n^o, ν_n^+) par le changement d'échelle brownien. Le résultat clé de ce mini-cours est le

Théorème. *La suite de mesures de probabilités μ_n (resp. $\mu_n^{\oplus}$, μ_n^o, μ_n^+) sur l'espace $\mathcal{C}[\,0,1\,]$ possède, au sens de la convergence faible, une mesure de probabilité limite, μ (resp. $\mu^{\oplus}$, μ^o, μ^+).*

La notion de convergence faible est développée Sections 3 et 4. Fixons le vocabulaire.

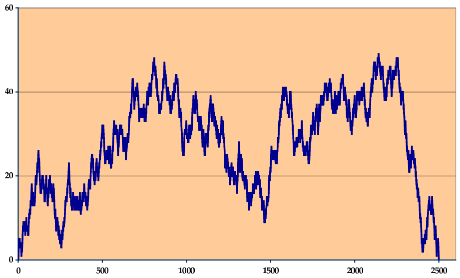


( ) Un chemin de Bernoulli de longueur $n = 2500$;



(+) Un méandre de Bernoulli au hasard de longueur $n = 2500$;

(O) Un chemin de Dyck bilatère au hasard de longueur $n = 1000$;



($\oplus$) Un chemin de Dyck au hasard de longueur $n = 2500$.

FIGURE 2. Chemins de Bernoulli au hasard de longueur 1000 à 2500 : ils possèdent en général des fluctuations d'ordre de grandeur quelques dizaines.

Définition (Mouvement brownien)**.** La mesure de probabilité μ, définie sur $\mathcal{C}[0,1]$ muni de sa tribu de boréliens, est appelée *mesure de Wiener*. Une variable aléatoire B à valeur dans $\mathcal{C}[0,1]$, ayant pour loi la mesure de Wiener, est appelée *mouvement brownien* (linéaire) (standard).

Définition (Excursion, pont et méandre browniens)**.** Une variable aléatoire e (resp. b, m) à valeur dans $\mathcal{C}[0,1]$, ayant pour loi la mesure $\mu^{\oplus}$ (resp. μ^{o}, μ^{+}), est appelée *excursion brownienne* (normalisée) (resp. *pont brownien*, *méandre brownien*).

Les chemins de Bernoulli de la Figure 2 donnent une idée de l'allure typique du mouvement brownien ( ), resp. du méandre (+), du pont (O), de l'excursion brownienne ($\oplus$). On peut résumer les définitions précédentes en un tableau 2×2, suivant la présence ou l'absence des deux contraintes (de positivité et de retour en 0 à la fin) :

Remarques.

- Le théorème ci-dessus rassemble en fait quatre théorèmes et possède quatre auteurs : la convergence des marches aléatoires vers la mesure de Wiener μ, ou vers le mouvement brownien, a été démontrée par Donsker [6], la convergence vers l'excursion brownienne par Kaigh [11], la convergence vers le méandre brownien par Iglehart [9], et celle vers le pont brownien par Liggett [13].
- Les résultats de Donsker, Iglehart et autres portent en fait sur la convergence de marches aléatoires, *conditionnées ou non*, de pas plus généraux que ceux de la marche aléatoire simple symétrique : les pas Y_i sont toujours i. i. d., mais de loi commune quasiment quelconque

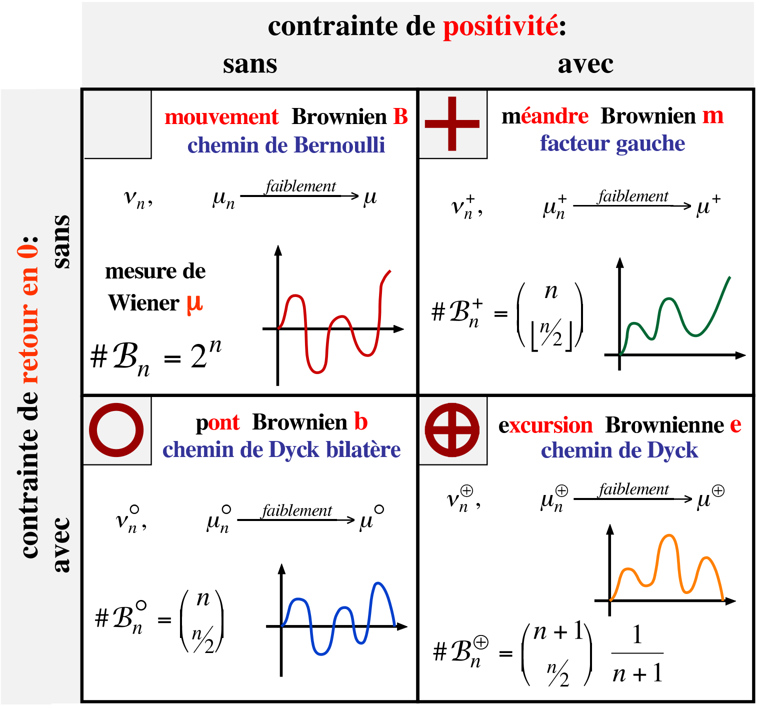


FIGURE 3. Les différents types de chemins et leurs analogues browniens.

(parfois Y_i doit être à valeurs entières, il doit toujours être centré ($\mathbf{E}[Y_i] = 0$) et à variance finie ($0 < \mathbf{E}[Y_i^2] < +\infty$)). Cette généralité est bien sûr intéressante, mais plus particulièrement en combinatoire, ou en analyse d'algorithme. Par exemple, il est expliqué dans Aldous ou dans [19] que le mot de Lukasiewicz associé à un arbre général (resp. étiqueté) de taille n est aussi associé à une marche aléatoire de longueur n, conditionnée $\oplus$, de pas $p = (p_k)_{k\geq -1}$ *géométrique* (donné par $p_k = 2^{-k-2}$) (resp. de pas *Poisson*, donné par $p_k = \frac{1}{k+1!\,e}$). Ainsi le résultat de Kaigh permet d'expliquer un faisceau de comportements asymptotiques de statistiques liées aux arbres « généraux » (resp. aux arbres étiquetés, graphes connexes et, par exemple, constantes de Wright, hachage linéaire, etc.).

– Une multitude de caractérisations et constructions différentes du mouvement brownien, du pont, de l'excursion et du méandre brownien, souvent découlant de propriétés combinatoires des chemins de Dyck ou de Bernoulli, seront données aux Sections 5 et 7.

3. Convergence faible : définition et premières conséquences

J'abrège encore ici ce qui est expliqué de manière très claire et assez économique dans le livre fondamental de Billingsley. On se placera dans un espace métrique $(S, \mathcal{S})$, qui, pour nous, sera exclusivement $\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}[0,1]$, muni de la distance usuelle dans le premier cas, de la distance de la convergence uniforme dans le second cas ; $\mathcal{S}$ désignera la tribu engendrée par (la plus petite tribu contenant les) ouverts de la topologie induite. Les mesures considérées seront des mesures de probabilité sur $\mathcal{S}$. Les résultats ci-dessous s'appliquent à des espaces métriques plus généraux, dont on exige parfois qu'il soient complets et séparables (voir [2, 14]).

Définition (Convergence faible)**.** On dit que la suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n\geq 0}$ *converge faiblement* vers la mesure de probabilité μ, si et seulement si, pour toute fonction *continue bornée* f

de S dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_n \int f\, d\mu_n = \int f\, d\mu.$$

On dit qu'une suite de variables aléatoires X_n à valeurs dans S converge faiblement vers la variable aléatoire X si et seulement si la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ des lois des v. a. X_n converge faiblement vers la loi μ de X. La CNS de la définition se traduit alors ainsi : pour toute fonction *continue bornée* f de S dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_n \mathbf{E}\big[f(X_n)\big] = \mathbf{E}\big[f(X)\big].$$

Il en découle immédiatement que

Propriété (Corollaire fondamental). *Si X_n converge faiblement vers X, et si Φ est une fonction continue de S dans T (deux espaces métriques), alors $\Phi(X_n)$ converge faiblement vers $\Phi(X)$.*

Démonstration. Pour toute fonction f continue bornée de T dans $\mathbb{R}$, $fo\Phi$ est continue bornée de S dans $\mathbb{R}$, donc

$$\lim_n \mathbf{E}\Big[f\big(\Phi(X_n)\big)\Big] = \mathbf{E}\Big[f\big(\Phi(X)\big)\Big].$$

$\square$

Quelques exemples de fonctions continues sur $S = \mathcal{C}[0,1]$.

1. Pour $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$, et pour des nombres réels t, t_1, ..., t_d fixés dans $[0,1]$, les applications $f \longmapsto \Phi_t(f) = f(t)$ et $f \longmapsto \Phi_{\vec{t}}(f) = \big(f(t_1),\dots,f(t_d)\big)$ sont continues, donc $X_n(t) \overset{\text{faiblement}}{\longrightarrow} X(t)$ et
$$\big(X_n(t_1),\dots,X_n(t_d)\big) \overset{\text{faiblement}}{\longrightarrow} \big(X(t_1),\dots,X(t_d)\big).$$
Cette conséquence de la convergence faible est appelée convergence des *distributions fini-dimensionelles* de X_n vers celles de X. La convergence des distributions fini-dimensionelles ne suffit pas à assurer la convergence faible, elle implique seulement que s'il y a convergence, alors X est la limite. Pour un exemple simple où il n'y a pas convergence faible, alors qu'il y a convergence des distributions fini-dimensionelles, voir la section suivante.
2. $f \longmapsto \big(\max f, \min f, \int_0^1 f(t)\,dt\big)$ est continue. Dans le cas du maximum, la convergence en loi de la hauteur des arbres généraux apparaît alors comme une conséquence du théorème clé, version Kaigh. Dans le même goût, la convergence en loi de la largeur des arbres simples est une conséquence de la convergence du profil, démontrée par Drmota et Gittenberger.
3. $f \longmapsto \operatorname{argmax} f$ n'est pas continue sur $\mathcal{C}[0,1]$, non plus que la suite des longueurs des intervalles séparant les zéros de f (on parle de longueurs des « excursions » de f).

En particulier, la convergence jointe de deux statistiques intéressantes ne coûte pas plus cher que la convergence d'une seule. Les derniers contre-exemples frustrants appellent un théorème relaxant l'hypothèse de continuité sur Φ. Notons $\mathcal{D}_\Phi$ l'ensemble des discontinuités de Φ.

Théorème (Voir [2, Th. 5.1, p. 30]). *Si $X_n \overset{\textit{faiblement}}{\longrightarrow} X$, et si $\mathbf{P}(X \in \mathcal{D}_\Phi) = 0$, alors $\Phi(X_n)$ converge faiblement vers $\Phi(X)$.*

La démonstration utilise le théorème « porte-manteau », qu'on verra un peu plus tard. Donnons deux exemples d'application :

– posons $\theta(f) = \sup\big\{\, x \in [0,1] \;\big|\; f(x) = \max_{[0,1]} f \,\big\}$. Alors θ n'est pas continue sur $\mathcal{C}[0,1]$, $\mathcal{D}_\theta$ étant l'ensemble des fonctions continues qui atteignent leur maximum en plus d'un point.

Il se trouve que le mouvement brownien standard B, avec probabilité 1, atteint son maximum en un seul point de $[0,1]$, donc

$$\mathbf{P}(B \in \mathcal{D}_\theta) = 0. \tag{1}$$

– posons $T_a(f) = \inf\{x \geq 0 \mid f(x) \geq a\}$, l'infimum de l'ensemble vide étant par convention pris égal à $+\infty$; $\mathcal{D}_{T_a}$ est l'ensemble des fonctions f satisfaisant $f \leq a$ sur un intervalle $[T_a(f), T_a(f)+h]$, $h > 0$. Il se trouve qu'avec probabilité 1, $T_a(B)$ est un point d'accumulation de $\{t \mid B_t > a\}$, entrainant que

$$\mathbf{P}(B \in \mathcal{D}_{T_a}) = 0. \tag{2}$$

Les propriétés 3. et 4. du mouvement brownien sont des conséquences plus ou moins directes de la propriété de Markov forte[4]. De nombreux processus stochastiques héritent[5] des propriétés (1) et (2) du mouvement brownien.

Les théorèmes de cette section permettent d'exploiter les résultats de Donsker *et al.*, mais réciproquement, joints avec des considérations combinatoires, ils permettent de trouver ou de retrouver les lois de fonctionelles intéressantes du mouvement brownien et de ses avatars.

Exercices.

1. Posons $M_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k$. Montrer que pour $k \geq 0$

$$\mathbf{P}(M_n \geq k) = \mathbf{P}(S_n \geq k+1) + \mathbf{P}(S_n \geq k).$$

Utiliser le Théorème central limite (version de Moivre[6]) pour en déduire que

$$\max\{B_s \mid 0 \leq s \leq 1\} \overset{\text{loi}}{=} |B_1|.$$

Une étape possible est de calculer

$$\mathbf{P}(M_n \geq k \text{ et } S_n \geq \ell),$$

ce qui permet en prime d'obtenir la densité jointe de $\big(B_1, \max\{B_s \mid 0 \leq s \leq 1\}\big)$.

2. Notons θ le lieu où le mouvement brownien atteint son maximum. Montrer que θ suit la loi de l'arcsinus, *i. e.* pour $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\mathbf{P}\big(\theta \in [a,b]\big) = \int_a^b \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{\pi}\big(\arcsin(2b-1) - \arcsin(2a-1)\big).$$

Pour cela, on pourra montrer que le lieu θ_n du premier maximum d'un chemin de Bernoulli de longueur n satisfait, pour $1 \leq k \leq n-1$,

$$\mathbf{P}(\theta_n = k) = \binom{k-1}{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\binom{n-k}{\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor}2^{-n},$$

et établir une convergence locale à l'aide de bornes sur le deuxième terme dans la formule de Stirling (si on veut être complètement rigoureux). On voit que le maximum est atteint avec une forte probabilité hors des intervalles $[a, 1-a]$, la densité de probabilité de θ ayant des pôles en 0 et 1.

[4] Pour (1), voir [12, preuve du Th. 2.9.12 p. 107]. Pour (2), voir la Section 5 de ce mini-cours.

[5] en vertu du théorème de Cameron–Martin–Girsanov, cf. [17, Ch. 8].

[6] Voir Section 5.

3. Montrer que la valeur terminale du méandre brownien, $m(1)$, suit la loi de Rayleigh, à savoir, pour $0 \leq a \leq b$,
$$\mathbf{P}\big(m(1) \in [\,a,b\,]\big) = \int_a^b x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{b^2}{2}\right).$$
4. Montrer que le lieu du maximum du pont brownien est uniformément distribué sur $[\,0,1\,]$[7]. Y a-t-il une démonstration combinatoire du fait que la valeur maximale du pont brownien suit la loi de Rayleigh[8]?
5. Démontrer la formule (11.5) page 78 de [2]. En déduire la loi du maximum de l'excursion brownienne[9].

4. Convergence faible : critères et autres caractérisations

Théorème (Théorème « porte-manteau », voir [2, Th. 2.1, p. 11]). *X_n converge faiblement vers X si et seulement si une des conditions suivantes est remplie :*
1. $\lim_n \mathbf{E}\big[f(X_n)\big] = \mathbf{E}\big[f(X)\big]$ *pour toute fonction f continue bornée de S dans $\mathbb{R}$;*
2. $\lim_n \mathbf{E}\big[f(X_n)\big] = \mathbf{E}\big[f(X)\big]$ *pour toute fonction f bornée, uniformément continue, de S dans $\mathbb{R}$;*
3. $\limsup_n \mathbf{P}(X_n \in F) \leq \mathbf{P}(X \in F)$ *pour tout fermé F de S ;*
4. $\liminf_n \mathbf{P}(X_n \in G) \geq \mathbf{P}(X \in G)$ *pour tout ouvert G de S ;*
5. $\lim_n \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A)$ *pour tout A de $\mathcal{S}$ qui vérifie* $\mathbf{P}(X \in \partial A) = 0$.

Ici encore on pourra se reporter à [2] pour les développements. Une classe $\mathcal{A}$ de fonctions de S caractérise une loi de probabilité si pour tout choix de deux variables X et Y à valeurs dans S, on a
$$\forall f \in \mathcal{A}, \quad \mathbf{E}\big[f(X)\big] = \mathbf{E}\big[f(Y)\big] \qquad \Rightarrow \qquad X \overset{\text{loi}}{=} Y.$$

Exemples.
1. Pour $S = \mathbb{R}$, la fonction de répartition caractérise une loi de probabilité, ce qui revient à dire que la classe $\mathcal{A} = \big\{\mathbf{1}_{(-\infty,x]} \,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\}$ est caractérisante.
2. Pour $S = \mathbb{R}^d$, la classe $\mathcal{A} = \big\{\Phi_{\vec{t}} \,\big|\, \vec{t} \in \mathbb{R}^d\big\}$, où $\Phi_{\vec{t}}$ est défini par
$$\Phi_{\vec{t}}(\vec{x}) = e^{i\,\vec{t}.\vec{x}}$$
est caractérisante, $\vec{t} \longmapsto \mathbf{E}\big[e^{i\vec{t}.X}\big]$ étant appelée *fonction caractéristique* de X.
3. Pour $S = \mathcal{C}[\,0,1\,]$, $\mathcal{C}[\,a,b\,]$ ou $\mathcal{C}[\,0,+\infty)$ la classe $\mathcal{A} = \big\{\ \Phi_{\vec{t}} \ \big|\ d \geq 1,\ \vec{t} \in \mathbb{R}^d\ \big\}$, où $\Phi_{\vec{t}}$ est défini par
$$\Phi_{\vec{t}}(f) = \big(f(t_1), \ldots, f(t_d)\big)$$
est caractérisante.
4. La classe $\mathcal{A}$ des fonctions bornées et uniformément continues de S dans $\mathbb{R}$ est caractérisante.

La convergence de $\mathbf{E}\big[\Phi(X_n)\big]$ vers $\mathbf{E}\big[\Phi(X)\big]$ pour toutes les fonctions Φ d'une classe caractérisante $\mathcal{A}$ suffit-elle à assurer la convergence faible de X_n vers X ? La réponse est différente pour chacun des exemples ci-dessus : pour 2. c'est oui, en vertu du Théorème de continuité de Paul Lévy [2, Théorème 7.6, p. 46], et il s'agit d'une CNS. Pour 1. c'est aussi oui, mais la condition est largement trop restrictive : il s'agit d'une condition nécessaire seulement si la loi limite est *diffuse* (*i. e.*

[7]Utiliser le lemme cyclique attribué parfois à Raney, parfois à Dvoretski ou à Motzkin.
[8]cf. [2, Section 11], mais on peut sûrement trouver un raccourci (je n'ai pas eu le temps de m'en assurer).
[9]C'est, en particulier, la loi limite pour la hauteur ou la largeur des arbres simples [8, 16].

$\mathbf{P}(X = a) = 0$ pour tout a dans $\mathbb{R}$), en vertu du 5. du Théorème « porte-manteau », puisque $\partial(-\infty, a] = \{a\}$! Enfin, la réponse est non pour l'exemple 3., comme le montre l'exemple suivant tiré de [2] : prenons X et X_n non aléatoires à valeur dans $\mathcal{C}[0,1]$, $X \equiv 0$ et $X_n \equiv f_n$, f_n ayant le graphe ci-dessous : les distributions fini-dimensionelles de X_n convergent bien faiblement vers

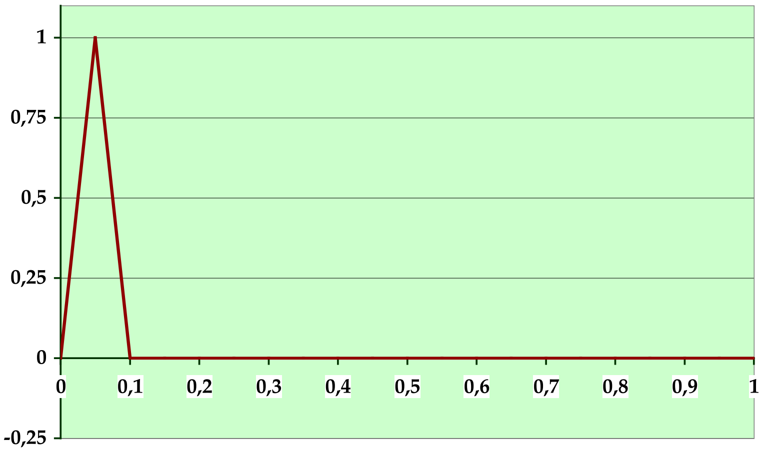


FIGURE 4. f_n est continue et affine par morceau, avec ici pour $n = 10$, $\big(f(0), f(1/2n), f(1/n), f(1)\big) = (0, 1, 0, 0)$.

les probabilités concentrées sur $0 \in \mathbb{R}^d$, *i. e.* vers les distributions fini-dimensionelles de X, mais $\Phi(X_n) = \max X_n \equiv 1$ ne converge pas faiblement vers $\Phi(X) = \max X \equiv 0$.

Il faut donc une condition supplémentaire à la convergence des distributions fini-dimensionelles pour obtenir la convergence faible des variables aléatoires à valeur dans $\mathcal{C}[0,1]$: c'est la condition de *tension*.

Définition. La suite de variables aléatoires X_n est *tendue* (ou *équitendue*) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε de S tel que

$$\forall n, \quad \mathbf{P}(X_n \notin K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Le Théorème de Prohorov [2, Section 6] assure que la tension est une CS (et une CNS si $S = \mathcal{C}[0,1]$) pour la *relative compacité* d'une suite de mesures de probabilité (ici les lois des v. a. X_n). Il suit que cette suite de variables $(X_n)_{n\geq 0}$ possède au moins une valeur d'adhérence pour la convergence faible. On connait les distributions fini-dimensionelles de cette valeur d'adhérence, ce sont les limites des distributions fini-dimensionelles de X_n, donc ce sont les distributions fini-dimensionelles de X, donc X est la seule valeur d'adhérence de X_n, or une suite relativement compacte ayant une seule valeur d'adhérence est convergente. Finalement :

Théorème. *Si une suite de variables aléatoires X_n variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}[0,1]$ est* tendue, *et si ses distributions fini-dimensionelles convergent vers celles de X, alors X_n converge faiblement vers X.*

Le chapitre 2 de [2] donne une foule de critères de tension dans $\mathcal{C}[0,1]$, basées sur la caractérisation d'Arzelà–Ascoli des compacts de $\mathcal{C}[0,1]$. Par exemple, les démonstrations de Donsker, Iglehart et Kaigh sont basées sur de tels critères, ainsi que la démonstration par Drmota et Gittenberger de la convergence du profil des arbres simples. Il existe des traitements plus modernes [10, 14, 15], mais [2] est déjà très lisible et complet.

Il faut aussi parler du lien entre convergence presque sûre, en probabilité, et dans $\mathcal{L}^p$ d'une part, convergence faible d'autre part. Les premières citées exigent que les variables X_n et X, à valeurs dans le même espace S à l'arrivée, soient aussi définie sur *le même triplet probabiliste* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ au départ, alors que la convergence faible, étant en fait uniquement la convergence de la mesure image par X_n vers la mesure image par X des mesures de probabilité des espaces de départ, exige seulement que X_n et X aient *le même espace d'arrivée* S. Notons $d(\cdot,\cdot)$ la distance sur S.

Définition. Une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge :

1. *presque sûrement* vers X si et seulement si
$$\mathbf{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega \;\Big|\; \lim_n d\big(X_n(\omega), X(\omega)\big) = 0\Big\}\Big) = 1\ ;$$
2. *en probabilité* vers X si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_n \mathbf{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega \;\Big|\; d\big(X_n(\omega), X(\omega)\big) \geq \varepsilon\Big\}\Big) = 0\ ;$$
3. vers X dans $\mathcal{L}^p$ si et seulement si
$$\lim_n \mathbf{E}\big[d(X_n, X)^p\big] = 0.$$

Théorème. *Les trois convergences ci-dessus entrainent la convergence faible.*

Démonstration. Seulement pour le 1., pour une fonction continue Φ, $\Phi(X_n)$ converge presque sûrement vers $\Phi(X)$, et si de plus Φ est bornée, le Théorème de convergence dominée entraine bien que $\lim_n \mathbf{E}\big[\Phi(X_n)\big] = \mathbf{E}\big[\Phi(X)\big]$. Par ailleurs, 3. entraine 2. en vertu de l'inégalité de Markov. Pour montrer que 2. entraine la convergence faible, il faut utiliser la caractérisation 2. du Théorème « porte-manteau » et travailler à peine un peu plus. □

Finalement il y a une quasi-réciproque utile au théorème précédent, c'est le

Théorème (Théorème de représentation de Skorohod, voir [18, II.86.1, p. 215])**.** *Si S est un espace de Lusin (en particulier pour $S = \mathcal{C}[0,1]$) et si la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$, à valeurs dans S, converge* faiblement *vers X, alors il existe un triplet probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et, définies sur ce triplet, des copies $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ et $\hat{X}$ de $(X_n)_{n\geq 0}$ et de X, telles que $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ converge* presque sûrement *vers $\hat{X}$.*

Par « copie », on entend que X_n et $\hat{X}_n$, ou encore X et $\hat{X}$, ont même loi. Par exemple, il n'est pas toujours naturel de construire des arbres simples aléatoires, ou des graphes aléatoires, de tailles différentes, sur le même espace de probabilité : il est beaucoup plus fréquent de considérer, par exemple, l'ensemble $\mathcal{T}_n$ des arbres étiquetés de taille n comme un espace de probabilité à lui tout seul, muni de la probabilité uniforme. Plonger tous les $\mathcal{T}_n$ dans un même triplet probabiliste évite pourtant parfois certains calculs de lois fini-dimensionelles : ils sont remplacés par des estimations plus faciles conduisant à une convergence presque sûre[10]. Par ailleurs, le Théorème de représentation de Skorohod est un outil très commode pour les démonstrations de la Section 6.

5. Propriétés du mouvement brownien

Le but ici n'est certainement pas de donner de démonstration, mais, à titre mnémotechnique, de montrer comment le mouvement brownien imite les (ou hérite des) propriétés de la marche aléatoire simple symétrique.

[10] Voir par exemple [4].

Accroissements indépendants et stationnaires. La marche aléatoire simple symétrique possède des accroissements indépendants : sous μ_n, pour $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_i \leq n$,

$$(Y_1 + \cdots + Y_{k_1}) \perp (Y_{k_1+1} + \cdots + Y_{k_2}) \perp \cdots \perp (Y_{k_{i-1}+1} + \cdots + Y_{k_i})$$

i. e.

$$S_{k_1} \perp (S_{k_2} - S_{k_1}) \perp \cdots \perp (S_{k_i} - S_{k_{i-1}})$$

et stationnaires

$$(Y_{k+1} + \cdots + Y_{k+\ell}) \stackrel{\text{loi}}{=} (Y_1 + \cdots + Y_\ell)$$

i. e.

$$S_{k+\ell} - S_k \stackrel{\text{loi}}{=} S_\ell.$$

Le mouvement brownien aussi ! C'est-à-dire sous μ, pour $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_i \leq 1$,

$$B_{t_1} \perp (B_{t_2} - B_{t_1}) \perp \cdots \perp (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

et pour $t \geq 0$, $s \geq 0$,

$$B_{t+s} - B_t \stackrel{\text{loi}}{=} B_s.$$

Cela entraine la propriété de Markov faible.

Propriété (Propriété de Markov faible). *Le nouveau processus $W = (W_s)_{0 \leq s \leq h}$, défini par*

$$W_s = B_{t+s} - B_t$$

est indépendant de $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$. De plus W a même loi que $(B_s)_{0 \leq s \leq h}$.

La démonstration requiert seulement de vérifier que pour chaque k, ℓ, et pour chaque suite de nombres réels $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq t$ et $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_\ell \leq h$,

$$(B_{t_i})_{1 \leq i \leq k} \perp (W_{s_i})_{1 \leq i \leq \ell} \qquad \text{et} \qquad (W_{s_i})_{1 \leq i \leq \ell} \stackrel{\text{loi}}{=} (B_{s_i})_{1 \leq i \leq \ell}.$$

Pour l'indépendance, il suffit de remarquer que $(B_{t_i})_{1 \leq i \leq k} \perp (W_{s_i})_{1 \leq i \leq \ell}$ est équivalent à

$$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \perp (W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_\ell} - W_{s_{\ell-1}})$$

et de remarquer que

$$(W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_\ell} - W_{s_{\ell-1}}) = (B_{t+s_1} - B_t, B_{t+s_2} - B_{t+s_1}, \ldots, B_{t+s_\ell} - B_{t+s_{\ell-1}}).$$

Cette dernière égalité plus la stationnarité des accroissements donne aussi l'égalité en loi.

Remarque. On a bien sûr $t > 0$, $h > 0$, et on doit pour le moment imposer $t + h \leq 1$, mais cette dernière inégalité est en fait superflue car il est naturel de définir le mouvement brownien sur $[0, +\infty)$ (comme de définir la marche aléatoire simple symétrique $(S_k)_{k \geq 0}$ pour chaque entier positif).

Une construction possible du mouvement brownien sur la demi-droite des entiers positifs. Considérons par exemple une suite $(B^{(n)})_{n\geq 0}$, $B^{(n)} = (B_s^{(n)})_{0\leq s\leq 1}$ de mouvements browniens mutuellement indépendants[11]. Définissons alors $B = (B_t)_{t\geq 0}$ comme un élément aléatoire de $\mathcal{C}[\,0,+\infty)$, tel que pour $n \leq s \leq t \leq n+1$,

$$B_t - B_s = B_t^{(n)} - B_s^{(n)},$$

c'est à dire qu'on recolle les graphes (trajectoires) des $B^{(n)}$ pour former le graphe de B. Il est alors facile de voir que B hérite des $B^{(n)}$ l'indépendance des accroissements. Il en hérite aussi la stationarité des accroissements, mais, pour le voir, il faut parler un peu de la loi de ces accroissements.

Lois des accroissements du mouvement brownien. La formule de Stirling, fondamentale en combinatoire, est née des travaux de de Moivre qui sont en quelque sorte un premier pas vers le mouvement brownien[12]. Posons

$$S_{k+\ell} - S_k = -\ell + 2Z.$$

Alors Z suit la loi binomiale $(\ell, \frac{1}{2})$, *i. e.* pour $0 \leq i \leq \ell$,

$$\mathbf{P}(Z = i) = \binom{\ell}{i}\frac{1}{2^i}.$$

On sait, depuis que de Moivre[13] a démontré la formule de Stirling[14], et l'approximation « gaussienne » de la loi binomiale[15], que l'on peut écrire, pour $\ell = 2\lfloor sn/2\rfloor \;\sim\; ns$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{k+\ell} - S_k = 2\lfloor x\sqrt{n}\;/2\rfloor) = \mathbf{P}\left(\frac{S_{k+\ell} - S_k}{\sqrt{n}} \in \left[\frac{2\lfloor x\sqrt{n}\,/2\rfloor - 1}{\sqrt{n}}, \frac{2\lfloor x\sqrt{n}\,/2\rfloor + 1}{\sqrt{n}}\right]\right)&\\ \sim \frac{2}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}e^{-x^2/2s} \sim \mathbf{P}\left(N\sqrt{s} \in \left[x - \frac{1}{\sqrt{n}}, x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)&,\end{aligned}$$

où N est une variable aléatoire suivant la loi normale (ou gaussienne) centrée réduite, souvent notée $\mathcal{N}(0,1)$, à savoir

$$\mathbf{P}\big(N \in [\,a,b\,]\big) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2}\,dx.$$

En d'autres termes, $\frac{S_{k+\ell}-S_k}{\sqrt{n}}$ a approximativement la même loi que $\sqrt{s}\,N$, à savoir, la loi normale (ou gaussienne) centrée de variance s, notée traditionellement $\mathcal{N}(0,s)$. D'autre part, $\frac{S_{k+\ell}-S_k}{\sqrt{n}}$ est l'accroissement, entre les points $\frac{k}{n}$ et, approximativement, $\frac{k}{n} \;+\; s$, de la fonction obtenue, à partir de la marche aléatoire simple symétrique, par changement d'échelle brownien. Par passage à la limite, on en déduit que

Propriété (Accroissements gaussiens). *Indépendemment de t,*

$$B_{t+s} - B_t \overset{loi}{=} \sqrt{s}\,N.$$

---

[11]On peut par exemple définir une telle suite comme un élément au hasard de $\mathcal{C}[\,0,1\,]^{\mathbb{N}}$ muni du produit infini de mesures de Wiener $\mu^{\otimes\mathbb{N}}$.

[12]un peu forcé, le rapprochement, non ?

[13]Voir `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/De_Moivre.html`.

[14]dans *Miscellanea Analytica*, 1730.

[15]dans *Approximatio ad Summam Terminorum Binomii* $\overline{a+b}|^n$ *in Seriem expansi*, 1733.

Notons

$$p_s(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2s}}.$$

On peut voir $p_s(x,y)$ comme la densité de probabilité de $x + \sqrt{s}\,N$, *i. e.*, en vertu de la propriété d'accroissements gaussiens indépendants, comme la densité conditionelle de B_{t+s}, sachant que $B_t = x$. On en déduit que

Propriété (Distributions fini-dimensionelles du mouvement brownien)**.** *La densité de probabilité f de $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d})$ est donnée par la formule*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = p_{t_1}(0, x_1)\, p_{t_2-t_1}(x_1, x_2)\ \dots\ p_{t_d-t_{d-1}}(x_{d-1}, x_d).$$

Une autre manière de caractériser les distributions fini-dimensionelles du mouvement brownien est de remarquer que $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_d})$ est un vecteur gaussien centré, dont la loi est donc caractérisée par sa matrice de covariance. On calcule facilement le terme général :

$$\mathbf{Cov}(B_{t_i}, B_{t_j}) = \min(t_i, t_j).$$

En effet, pour $s \le t$,

$$\mathbf{Cov}(B_s, B_t) = \mathbf{Cov}(B_s, B_s) + \mathbf{Cov}(B_s, B_t - B_s) = \mathbf{Var}(B_s) = \mathbf{Var}\big(\sqrt{s}\,N\big) = s\,\mathbf{Var}(N) = s,$$

la deuxième égalité découlant de $B_s \perp B_t - B_s$.

Rappelons qu'une variable aléatoire $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un *vecteur gaussien* si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont gaussiennes (ont même loi que $m + \sigma N$, pour un choix approprié de m et σ), ou encore, si et seulement si X est image par une transformation affine (disons, $X = \vec{m} + A\vec{N}$) d'un vecteur $\vec{N} = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ dont les composantes N_i sont i. i. d. et de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Dans le cas des distributions fini-dimensionelles du mouvement brownien, on a $\vec{m} = 0$, et on peut exhiber A et $\vec{N}$, en posant

$$N_1 = \frac{B_{t_1}}{\sqrt{t_1}}, \qquad N_i = \frac{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}.$$

La loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par l'espérance de chacune de ses composantes et par sa matrice de covariance. Dans la représentation affine ci-dessus, $\vec{m}$ est le vecteur des espérances des composantes, et la matrice de covariance est $\Gamma = {}^tA\,A$.

Définition. Un processus X dont les distributions fini-dimensionelles sont gaussiennes est appelé *processus gaussien.* La loi du processus est alors caractérisée par sa *fonction moyenne* $m(t) = \mathbf{E}[X_t]$ et sa *fonction covariance* $\Gamma(s,t) = \mathbf{Cov}(X_s, X_t)$.

Le mouvement brownien et, comme on le verra en Section 7, le pont brownien, sont deux exemples de processus gaussiens centrés ($m(t) \equiv 0$). La fonction covariance du mouvement brownien est

$$\Gamma(s,t) = \min(s,t).$$

Théorème (Transformations des trajectoires du mouvement brownien)**.** *Le mouvement brownien est préservé par les transformations suivantes :*

- Symétrie : $W^{(1)} = (-B_t)_{t\ge 0}$ *est un mouvement brownien.*
- Décalage : *Pour* $t_0 \ge 0$, $W^{(2)} = (B_{t_0+t} - B_{t_0})_{t\ge 0}$ *est un mouvement brownien.*
- Changement d'échelle : *Pour* $c > 0$, $W^{(3)} = \big(\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}\big)_{t\ge 0}$ *est un mouvement brownien.*
- Inversion du temps : $W^{(4)} = \big(W_t^{(4)}\big)_{t\ge 0}$ *défini par* $W_t^{(4)} = tB_{1/t}$, *pour* $t > 0$, *et par* $W_0^{(4)} = 0$, *est un mouvement brownien.*

Démonstration. Chacun de ces processus est gaussien centré : il suffit de calculer sa fonction covariance. Dans les quatre cas, on trouve $\Gamma^{(i)}(s,t) = \min(s,t)$. Reste un petit problème : la continuité de $W^{(4)}$ en 0, qui n'est pas automatique. La loi forte des grands nombres[16] pour le mouvement brownien, stipule que

$$\mathbf{P}\left(\lim_{+\infty} \frac{B_t}{t} = 0\right) = 1.$$

En conséquence

$$\mathbf{P}\Big(\big\{\, \omega \in \Omega \;\big|\; t \to W_t^{(4)}(\omega) \text{ est continue en } 0 \,\big\}\Big) = 1.$$

Le processus $W^{(4)}$ est donc *presque* sûrement continu en 0, alors que le mouvement brownien, tel qu'on l'a défini, est à valeurs dans $\mathcal{C}[0,1]$, c'est-à-dire que $t \to B_t(\omega)$ est continu en 0 pour *tout* ω. Régler ce genre de problème rigoureusement est justement ce que je veux éviter dans une introduction au mouvement brownien prévue pour être succincte[17]. □

Temps d'atteinte. Le temps d'atteinte de la hauteur $a > 0$, noté T_a, est défini par

$$T_a = \begin{cases} \inf\{\, t \geq 0 \mid B_t \geq a \,\} & \text{si l'ensemble n'est pas vide,} \\ +\infty & \text{si l'ensemble est vide.} \end{cases}$$

Théorème. *T_a a même loi que $\frac{a^2}{N^2}$, en particulier $\mathbf{P}(T_a = +\infty) = 0$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_a > t) &= \mathbf{P}\big(\max\{\, B_s \mid 0 \leq s \leq t \,\} < a\big) = \mathbf{P}\left(\max\left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} B_{ts} \;\middle|\; 0 \leq s \leq 1 \right\} < \frac{a}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\max\{B_s \mid 0 \leq s \leq 1\} < \frac{a}{\sqrt{t}}\right) = \mathbf{P}\left(|B_1| < \frac{a}{\sqrt{t}}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} > t\right), \end{aligned}$$

la troisième égalité par changement d'échelle, la quatrième comme conséquence de l'exercice 1, Section 3. □

Définition. Une v. a. T à valeurs dans $[0,+\infty]$ est un *temps d'arrêt* du mouvement brownien si et seulement si $\big\{\, \omega \;\big|\; T(\omega) \leq t \,\big\}$ est dans la tribu engendrée par $(B_s)_{0 \leq s \leq t}$, en d'autre termes, si on peut décider de la véracité de l'affirmation « $T(\omega) \leq t$ » en observant la trajectoire du mouvement brownien seulement jusqu'à l'instant t (inclus).

En particulier, les temps d'atteinte T_a sont des temps d'arrêts.

Propriété (Propriété de Markov forte, cf. [12, Section 2.5]). *T étant un temps d'arrêt, le nouveau processus $W^T = (W_s^T)_{0 \leq s}$, défini par*

$$W_s^T = B_{T+s} - B_T$$

est indépendant de $(B_s)_{0 \leq s \leq T}$. De plus W^T a même loi que le mouvement brownien.

[16]Pour une démonstration simple, voir [12, Problème 9.3, p. 104 et Remarque 3.10, p. 15]. On peut être plus précis sur le comportement du mouvement brownien en $+\infty$: voir, [12, p. 112], la loi du logarithme itérée due à Khintchine, 1933.

[17]Il se trouve que $W^{(4)}$ est indistinguable d'un processus à valeurs dans $\mathcal{C}[0,1]$, voir [12, Section 1.1].

Quelques conséquences.

- $T_{a+b} - T_a$ est le temps d'atteinte de b par le processus W^{T_a}, il est donc indépendant de T_a et a la même loi que T_b. En d'autres termes, le processus $(T_a)_{a\geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires[18].
- Presque sûrement, $+\infty$ est un point d'accumulation de l'ensemble des zéros du mouvement brownien : posons T le premier zéro du mouvement brownien après l'instant 1 (*i. e.* $T = \inf\{\, t \geq 1 \mid B_t = 0 \,\}$). La loi conditionelle de T sachant que $B_1 = a$ est la loi de T_a, donc T est presque sûrement fini ; T est un temps d'arrêt donc W^T est lui-même un mouvement brownien et possède lui aussi un zéro après son instant 1 (donc B possède un zéro après l'instant 2, etc.).
- De la même manière on voit que, presque sûrement, $+\infty$ est un point d'accumulation de l'ensemble $\{\, t \geq 0 \mid B_t > 0 \,\}$, ou de l'ensemble $\{\, t \geq 0 \mid B_t < 0 \,\}$. Ainsi, par inversion du temps, 0 est est un point d'accumulation des ensembles $\{\, t > 0 \mid B_t = 0 \,\}$, $\{\, t > 0 \mid B_t > 0 \,\}$ et $\{\, t > 0 \mid B_t < 0 \,\}$.
- Ainsi T_a est est un point d'accumulation des ensembles $\{\, t > T_a \mid B_t = a \,\}$, $\{\, t > T_a \mid B_t < a \,\}$ et $\{\, t > T_a \mid B_t > a \,\}$. Cette toute dernière assertion implique la relation (2).

Ce ne sont que quelques exemples d'application de la propriété de Markov forte, mais en fait on l'applique comme on respire, sans s'en rendre compte. On a commencé à aborder la structure de l'ensemble des zéros du mouvement brownien, alors mentionnons que

Théorème (Structure de l'ensemble des zéros du mouvement brownien). *Presque sûrement, l'ensemble des zéros du mouvement brownien est fermé, non borné, sans point isolé, de mesure de Lebesgue nulle, et possède 0 comme point d'accumulation*[19].

Finalement, mentionnons

Quelques propriétés locales du mouvement brownien. Pour un chemin de Bernoulli f quelconque dans $\mathcal{C}[\,0,n\,]$, on a

$$\sum_{k=a}^{b-1} \bigl|f(k+1) - f(k)\bigr|^2 = b - a,$$

pour a et b entiers, $0 \leq a < b \leq n$. Par scaling brownien, on obtient que presque sûrement pour la mesure de probabilité μ_n,

$$\sum_{k=0}^{n(b-a)-1} \left| f\Bigl(a + \frac{k+1}{n}\Bigr) - f\Bigl(a + \frac{k}{n}\Bigr) \right|^2 = b - a,$$

si a et b sont dans $[\,0,1\,]$ et de la forme $\frac{\ell}{n}$, ℓ entier. Cela se traduit par le fait que le mouvement brownien possède une variation quadratique égale à t (toute fonction continument dérivable, p. e., possède une variation quadratique nulle). Plus précisément, pour une subdivision $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ de $[\,0,t\,]$ (*i. e.* $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m = t$), notons

$$V_t^{(2)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{m} \bigl|B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\bigr|^2$$

la *variation quadratique* du mouvement brownien sur la subdivision Π, et notons

$$\|\Pi\| = \max_{1\leq k\leq m} |t_k - t_{k-1}|$$

[18] mais ses trajectoires ne sont pas continues, cf. [12, Section 6.2.A].

[19] cf. [12, Th. 2.9.6].

le *pas* de la subdivision Π. On a alors

Propriété (Variation quadratique, cf. [12, Th. 1.5.8 et Problème 2.5.5]). *En probabilité,* $V_t^{(2)}(\Pi)$ *converge vers* t *quand* $\|\Pi\|$ *tend vers 0,* i. e. *pour chaque* $\varepsilon, \eta > 0$, *on peut trouver* $\delta > 0$ *tel que* $\|\Pi\| < \delta$ *entraine*

$$\mathbf{P}\left(\left|V_t^{(2)}(\Pi) - t\right| > \varepsilon\right) < \eta.$$

Ceci, avec le fait que presque sûrement sous μ_n une fonction possède une dérivée dont la valeur absolue en tout point (sauf en $\frac{k}{n}$) est $\sqrt{n}$, laisse à penser que le mouvement brownien a peu de chances d'être dérivable en un point donné. En fait on a un résultat beaucoup plus précis :

Théorème (Paley, Wiener & Zygmund, 1933, cf. [12, Th. 2.9.18]).

$$\mathbf{P}\Big(\left\{\, \omega \in \Omega \;\middle|\; \textit{la fonction } t \to B_t(\omega) \textit{ n'est dérivable nulle part} \right\}\Big) = 1.$$

Une autre propriété, que l'on peut aussi pressentir en générant des chemins de Bernoulli aléatoires, illustre bien le comportement erratique du mouvement brownien :

Théorème (Dvoretzky, Erdős & Kakutani, 1961, cf. [12, Th. 2.9.13]).

$$\mathbf{P}\Big(\left\{\, \omega \in \Omega \;\middle|\; \textit{la fonction } t \to B_t(\omega) \textit{ n'a aucun point de croissance} \right\}\Big) = 1.$$

Un point t est un point de croissance de f si on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in [t-\delta, t]$ et tout $z \in [t, t+\delta]$, $f(y) \le f(t) \le f(z)$.

Cet aperçu des propriétés du mouvement brownien est à la fois très incomplet et assez désordonné. Heureusement la littérature sur le sujet est riche, et on pourra s'y reporter.

Bibliography

[1] Biane (Philippe), Pitman (Jim), and Yor (Marc). – Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. *Bulletin of the American Mathematical Society (New Series)*, vol. 38, n° 4, 2001, pp. 435–465.

[2] Billingsley (Patrick). – *Convergence of probability measures.* – John Wiley & Sons Inc., New York, 1968, xii+253p.

[3] Borodin (Andrei N.) and Salminen (Paavo). – *Handbook of Brownian motion—facts and formulae.* – Birkhäuser Verlag, Basel, 1996, xiv+462p.

[4] Chassaing (Philippe) and Marckert (Jean-François). – Parking functions, empirical processes, and the width of rooted labeled trees. *Electronic Journal of Combinatorics*, vol. 8, n° 1, 2001, p. Research Paper 14. 19 pages.

[5] Csörgő (M.) and Révész (P.). – *Strong approximations in probability and statistics.* – Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1981, 284p.

[6] Donsker (Monroe D.). – An invariance principle for certain probability limit theorems. *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 1951, n° 6, 1951, p. 12.

[7] Erdös (P.) and Kac (M.). – On certain limit theorems of the theory of probability. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 52, 1946, pp. 292–302.

[8] Flajolet (Philippe) and Odlyzko (Andrew). – The average height of binary trees and other simple trees. *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 25, n° 2, 1982, pp. 171–213.

[9] Iglehart (Donald L.). – Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive. *Annals of Probability*, vol. 2, 1974, pp. 608–619.

[10] Jacod (Jean) and Shiryaev (Albert N.). – *Limit theorems for stochastic processes.* – Springer-Verlag, Berlin, 1987, xviii+601p.

[11] Kaigh (W. D.). – An invariance principle for random walk conditioned by a late return to zero. *Annals of Probability*, vol. 4, n° 1, 1976, pp. 115–121.

[12] Karatzas (Ioannis) and Shreve (Steven E.). – *Brownian motion and stochastic calculus.* – Springer-Verlag, New York, 1991, second edition, xxiv+470p.

[13] Liggett (Thomas M.). – An invariance principle for conditioned sums of independent random variables. *J. Math. Mech.*, vol. 18, 1968, pp. 559–570.
[14] Parthasarathy (K. R.). – *Probability measures on metric spaces.* – Academic Press Inc., New York, 1967, xi+276p.
[15] Pollard (David). – *Convergence of stochastic processes.* – Springer-Verlag, New York, 1984, xiv+215p.
[16] Rényi (A.) and Szekeres (G.). – On the height of trees. *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 7, 1967, pp. 497–507.
[17] Revuz (Daniel) and Yor (Marc). – *Continuous martingales and Brownian motion.* – Springer-Verlag, Berlin, 1999, third edition, xiv+602p.
[18] Rogers (L. C. G.) and Williams (David). – *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1.* – John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1994, second edition, xx+386p. Foundations.
[19] Spencer (Joel). – Enumerating graphs and Brownian motion. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 50, n° 3, 1997, pp. 291–294.
[20] Yor (M.). – *Local times and excursions for brownian motion: a concise introduction.* – Postgrado de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuala, Caracas, 1995, *Lecciones en Mathemáticas*, vol. 1.