Un critère de non complète intégrabilité pour les systèmes hamiltoniens.

15 janvier 2001, à l'INRIA Rocquencourt

Delphine Boucher
dboucher@univ-lr.fr
LMCA, La Rochelle

(réalisé à Limoges sous la direction de J.A. Weil)

Plan

1. Systèmes hamiltoniens.
   (a) Notion de complète intégrabilité.
   (b) Critère de non-intégrabilité de Morales-Ramis.
   (c) Un nouveau critère de non-intégrabilité.
2. Solutions formelles et factorisation.
   (a) Exposants généralisés.
   (b) Solutions polynomiales.
3. Application au problème plan des trois corps.

1 Les systèmes hamiltoniens. Le problème plan des trois corps.

Trois corps soumis à leur attraction gravitationnelle mutuelle.

q_i : vecteur position,

m_i : masse (**paramètre**),

p_i : moment $p_i = m_i \frac{dq_i}{dt}$.

$$H = \sum_{i=1}^{3} \frac{||p_i||^2}{2m_i} - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{g\, m_i\, m_j}{||q_i - q_j||}$$

g: constante gravitationnelle.

$$(S) \begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ i = 1 \cdots 3 \end{cases}$$

1 a) Notion de complète intégrabilité.

Soit $(\mathcal{S})$ un système hamiltonien,
degré de liberté n.
Le système (S) est dit *complètement intégrable* s'il existe n fonctions $G_1, \ldots, G_n$ telles que

- $\{G_i, H\} = 0$: G_i *intégrale première*,
- $\{G_i, G_j\} = \{G_j, G_i\} = 0$: intégrales premières *en involution*,
- $G_1, \ldots, G_n$ fonctionnellement indépendantes.

1 a) Notion de complète intégrabilité.

Un extrait de
'Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique',
Poincaré, *Acta Mathematica*, 1890

" ... J'établis par exemple que le problème des trois corps ne comporte, en dehors des intégrales connues, aucune intégrale analytique uniforme. Bien d'autres circonstances nous font prévoir que la solution complète, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués ..."

1 a) Notion de complète intégrabilité.

Question: Le système (S) est-il complètement intégrable ?

Stratégie: *système variationnel* le long d'une solution particulière (Poincaré 1890)

Ziglin (1982): groupe de monodromie

$$\left.\begin{array}{l}\text{R.C. Churchill, D.L. Rod,}\\ \text{M.F. Singer(1995)}\\ \\ \text{J.J. Morales, J.P. Ramis}\\ \text{(1998)}\end{array}\right\}: \quad \begin{array}{c}\text{groupe}\\ \text{de Galois}\\ \text{différentiel}\end{array}$$

1 b) Critère de non-intégrabilité de Morales-Ramis.

Théorème (J.J. Morales, J.P. Ramis)
Soient
(S), *système hamiltonien;*

X_0, *solution particulière de* (S)*;*

$L(y) = 0$, *équation normale variationnelle de* (S) *le long de la solution* X_0*;*

G, *groupe de Galois différentiel de* $L(y) = 0$.

G^0 non abélien

$\Downarrow$

(S) non complètement intégrable

1 c) Un nouveau critère de non-intégrabilité.

Théorème
Soient

(S), *système hamiltonien;*

X_0, *solution particulière de* (S)*;*

$L(y) = 0$, *équation normale variationnelle de* (S) *le long de la solution* X_0*;*

G, *groupe de Galois différentiel de* $L(y) = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \left.\begin{array}{l}\textit{log localement}\\ \textit{irréductibilité}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\textit{pour un facteur}\\ \textit{à droite de } L\end{array} \\ \Downarrow \\ G^0 \textit{ non abélien} \\ \Downarrow \\ (S) \textit{ non complètement intégrable} \end{array}}$$

2. Solutions formelles et factorisation.

$$L(y(x)) = a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0$$

$$a_k(x) \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$$

(schéma de rappel pour le cas non paramétré)

2. Solutions formelles et factorisation.

(rappels pour le cas non paramétré)

- Solution formelle
  au point zéro:

$$\boxed{z(x) = \exp\left(\int \frac{e(x)}{x}\right)\Sigma(x)}$$

$e(x)$, *exposant généralisé* au point zéro.

$$e(x) \in K\left[\frac{1}{x^{\frac{1}{r}}}\right]$$

$\Sigma(x) =$
$\Sigma_0(x^{\frac{1}{r}}) + c_1 \ln(x)\,\Sigma_1(x^{\frac{1}{r}}) + \cdots + c_k\,(\ln(x))^k\,\Sigma_k(x^{\frac{1}{r}})$

- Factorisation

  – facteur à droite de degré un:
  $z(x)$ solution exponentielle: $\frac{z'(x)}{z(x)} \in K(x)$

  $$\boxed{\frac{z'(x)}{z(x)} = \sum_i \frac{e_i(x)}{x - x_i} + p(x) + \frac{q'(x)}{q(x)}}$$

  $a_n(x_i) = 0$
  $e_i(x)$, exposant généralisé en x_i

  $$e_i(x) \in K\left[\frac{1}{x - x_i}\right]$$

  $$p(x) \in K[x]$$

  $q(x)$ *solution polynomiale* de
  $\tilde{L}(y(x)) = L(\exp(\int(S(x)dx))\, y(x)) = 0$.

  – facteurs à droite de degré supérieur à un
  solutions exponentielles d'équations auxiliaires + relations de Plücker

2 a) Exposants généralisés.

Théorème
Soit

$$L_m(y(x)) = a_n(x)\, y^{(n)}(x) + \cdots + a_0(m,x)\, y(x) = 0,$$

avec
$m = (m_1, \ldots, m_s)$,
$a_k(m,x) \in K_m[x]$,
$a_n(x) \in K[x]$, $a_n(0) = 0$,
$K = \overline{\mathbb{Q}}$, $K_m = \overline{\mathbb{Q}}(m)$.

On peut construire un nombre fini de couples $(\mathbf{C}, (e_1(m,x), \ldots, e_n(m,x)))$
où $\mathbf{C}$ *est un ensemble constructible;*
la réunion des ensembles $\mathbf{C}$ *est égale à* K^s
et pour tout m *dans* $\mathbf{C}$, *les exposants généralisés en* 0 *pour* $L_m(y(x)) = 0$ *sont*

$$e_1(m,x), \ldots, e_n(m,x).$$

2 b) Solutions polynomiales
Equations d'ordre un.

Exemple 1

$$x\,y'(x) - m_1\,y(x) = 0$$

$$V = \{m_1;\ m_1 \in \mathbf{N}\}.$$

Exemple 2

$$y'(x) - \left(\tfrac{m_1}{x} + \tfrac{m_2}{x-1} + m_2^2 - m_1^3 + 2\right) y(x) = 0$$

$V = \{(m_1, m_2);\ m_1 \in \mathbf{N},\, m_2 \in \mathbf{N},\, m_2^2 - m_1^3 = -2\}$
$= \{(3, 5)\}.$

Théorème (J.A. Weil)

Il n'existe aucun algorithme qui, étant donnée une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux paramétrés, décide si l'ensemble des valeurs des paramètres pour lesquelles cette équation a une solution polynomiale est vide ou non.

2 b) Solutions polynomiales.

- Polynôme solution d'une équation différentielle.

$$\sum_{k=0}^{d} z_k \, x^k$$

solution de $L(y) = 0$.

$$\updownarrow$$

- Suite finie solution d'une relation de récurrence.

$$(\dots, 0, z_0, \dots, z_d, 0, \dots)$$

solution de $\alpha_0(i) \, y_i + \cdots + \alpha_b(i) \, y_{i+b} = 0$.

$$\updownarrow$$

- Vecteur solution d'un système linéaire.

$${}^t(z_0, \dots, z_d)$$

solution de $A_d Y = 0$

2 b) Solutions polynomiales.

Exemple 3

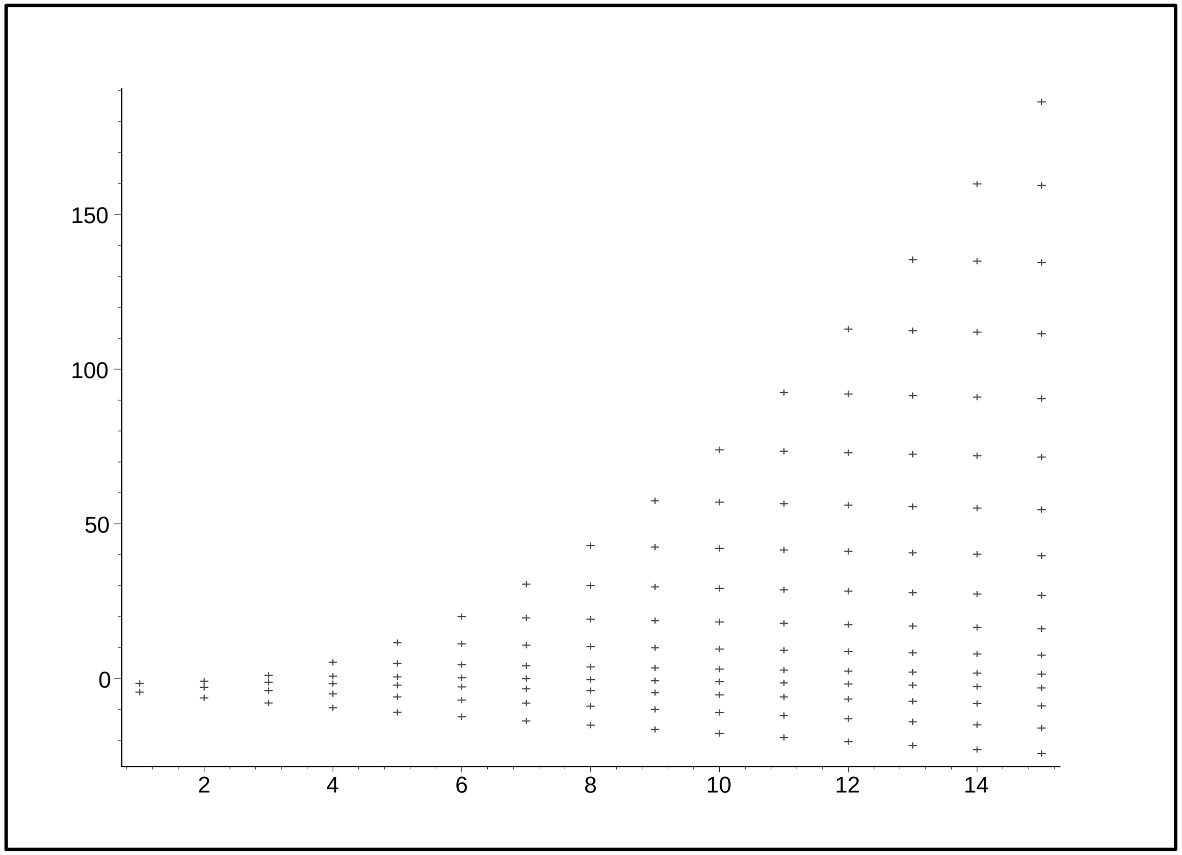
$$x\,(x-1)\,y''(x)+(-1-2\,x+x^2)\,y'(x)-$$
$$(2+m_2+m_1\,x)\,y(x)=0$$

relation de récurrence:

$(m_1-i)\,y_i+(4+m_2+i-i^2)\,y_{i+1}+(i+2)^2\,y_{i+2}=0$

$V=\{(m_1,m_2);\ m_1\in\mathbb{N},\ det(A_{m_1}(m_1,m_2))=0\}$

$$A_i(m_1, m_2) = \begin{pmatrix} m_2+2 & 1^2 & 0 & & & & & & \\ m_1 & m_2+4 & 2^2 & 0 & & & & & \\ 0 & m_1-1 & m_2+4 & 3^2 & 0 & & & & \\ & 0 & m_1-2 & m_2+2 & 4^2 & 0 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & i^2 \\ & & & & & & 0 & m_1-i+1 & m_2-i^2+3i+2 \end{pmatrix}$$


150
100
50
0
2
4
6
8
10
12
14

3 Le problème plan des trois corps. Système normal variationnel le long de la solution de Lagrange.

Hypothèse : $m_1 = m_3 = 1$, $m_2 > 0$, $c \neq 0$.

$$Y'(x) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -{}^tA_1 \end{pmatrix} Y(x)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{-3\,m_2\,(2\,x-1)}{(2+m_2)x(x-1)} & \frac{-2\,i(m_2-1)}{(2+m_2)x(x-1)} \\ \frac{-2\,i(2\,m_2+1)}{(2+m_2)x(x-1)} & \frac{3\,m_2\left(1+2\,x^2-2\,x\right)}{(2\,x-1)(2+m_2)x(x-1)} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \frac{4\,ic^3x\,(x-1)\,(2+m_2)}{m_2\,(2\,m_2+1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{i(2\,m_2+1)^3 m_2\,(25\,m_2+2)}{4\,x^2(x-1)^2(2+m_2)^3c^3} & \frac{-3\,{m_2}^2(2\,m_2+1)^3}{(2\,x-1)x^2(x-1)^2(2+m_2)^3c^3} \\ \frac{-3\,{m_2}^2(2\,m_2+1)^3}{(2\,x-1)x^2(x-1)^2(2+m_2)^3c^3} & \frac{i\left(4\,x^2m_2-4\,m_2\,x-5\,m_2-40\,x^2+40\,x-10\right)m_2\,(2\,m_2+1)^3}{4\,x^2(x-1)^2(2+m_2)^3c^3(2\,x-1)^2} \end{pmatrix}$$

3 Le problème plan des trois corps. Equation normale variationnelle le long de la solution de Lagrange.

Hypothèse : $m_1 = m_3 = 1,\ m_2 > 0,\ c \neq 0.$

$L(y(x)) = L_{m_2}(y(x)) =$

$(m_2 + 2)^2\, x^4\, (x-1)^4\, y^{(4)}(x) +$

$(m_2 + 2)^2\ (2\,x - 1)\ x^3\, (x-1)^3\, y^{(3)}(x) -$

$3(m_2 + 2)^2\, (2\,x(x-1) + 1)\, (x-1)^2\, x^2\, y^{(2)}(x) +$

$3\,(m_2{+}2)\ (2\,x - 1)\ (3\,x(x-1) + 2\,(m_2 + 2))\ x\,(x-1)\ y'(x) +$

$\Big(9\ (4\,m_2 - 1)\, x^2 (x-1)^2 - 9\ (2\,m_2 + 5)\, (m_2 + 2)\, x(x-1)$
$-6(m_2 + 2)^2\Big)\ y(x)$

$= 0$

3 Le problème plan des trois corps.

Hypothèse : $m_1 = m_3 = 1$, $m_2 > 0$, $c \neq 0$.

L_1 facteur à droite de degré 2 de L.

$L_1(y(x)) =$

$(m_2+2)\,x^2\,(x-1)^2\,(12x(x-1)+m_2+2)\,y''(x)+$

$(m_2+2)^2\;(2\,x-1)\;x\;(x-1)\;y'(x)-$

$(108\,x^2(x-1)^2+27\,(m_2+2)\,x(x-1)+(m_2+2)^2)\,y(x) = 0$

log?
exposants au point zéro: -1 et 1;

$$z = \Sigma_0(x) - \frac{9}{2}\frac{(2m_2+1)}{(m_2+2)^2}\,\ln(x)\,\Sigma_1(x)$$

où

$$\Sigma_0(x) = \tfrac{1}{x}\,(1+\tfrac{1-m_2}{2+m_2}\,x+\cdots)$$
$$\Sigma_1(x) = x\,(1+\tfrac{m_2-7}{m_2+2}\,x+\cdots)$$

irréductibilité ?
solutions exponentielles: $\frac{q(x)}{x(x-1)}$
avec $q(x)$ polynôme de degré d,

$$d^2 - 5\,d + 6 - \frac{9}{m_2+2} = 0.$$

3 Le problème plan des trois corps.

$$m_1 > 0,\ m_2 > 0,\ m_3 = 1$$

relation de Plücker

$$\mu\,(f(m_1,m_2)\,\lambda + g(m_1,m_2)\,\mu) = 0, g(m_1,m_2) \neq 0$$

1. $f(m_1,m_2) = 0$: un facteur L_1
   L_1 est irréductible,
   $L_1(y) = 0$ a des solutions formelles en zéro avec logarithmes.

2. $f(m_1,m_2) \neq 0$: deux facteurs L_1 et L_2
   L_1 et L_2 ne sont pas simultanément réductibles,
   $L_1(y) = 0$ et $L_2(y) = 0$ ont des solutions formelles en zéro avec logarithmes.

Théorème
Le problème plan des trois corps (le long de la solution de Lagrange indéxée par un paramètre non nul c) n'est pas complètement intégrable.

Conclusion, perspectives.

Travailler directement sur les systèmes (package ISOLDE, Pflügel)

- évite d'utiliser la technique du vecteur cyclique;

- évite de 'casser' la structure symplectique du système variationnel

$$Y' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & -{}^tA_1 \end{pmatrix} Y$$

avec

$${}^tA_2 = A_2,\ {}^tA_3 = A_3.$$