

## Identités de fonctions spéciales et séries D-finies

### Résumé

Les équations différentielles linéaires et les récurrences linéaires fournissent des structures de données permettant de calculer avec des fonctions ou des suites, et en particulier de prouver des identités sur ces objets.

### 1. Définitions

**1.1. Rappels et complément sur les séries formelles.** Si  $\mathbb{K}$  désigne un corps, l'anneau des séries formelles à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est noté  $\mathbb{K}[[X]]$ . Ses principales propriétés ont été présentées au Cours 3. Son corps des fractions, noté  $\mathbb{K}((X))$  est égal à  $\mathbb{K}[[X]][1/X]$ . Ses éléments sont appelés des séries de Laurent formelles. C'est une algèbre non seulement sur  $\mathbb{K}$ , mais aussi sur le corps des fractions rationnelles  $\mathbb{K}(X)$ .

Dans tout ce cours on suppose  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle. On peut donc penser sans rien perdre aux idées à  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ .

#### 1.2. Séries D-finies.

**DÉFINITION 15.** Une série formelle  $A(X)$  à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$  est dite différentiellement finie (ou D-finie) lorsque ses dérivées successives  $A, A', \dots$ , engendrent un espace vectoriel de dimension finie sur le corps  $\mathbb{K}(X)$  des fractions rationnelles.

De manière équivalente, cette série est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans  $\mathbb{K}(X)$  : si c'est le cas alors l'équation différentielle permet de récrire toute dérivée d'ordre supérieur à celui de l'équation en termes des dérivées d'ordre moindre (en nombre borné par l'ordre), à l'inverse, si l'espace est de dimension finie, alors pour  $m$  suffisamment grand,  $A, A', \dots, A^{(m)}$  sont liées et une relation de liaison entre ces dérivées est une équation différentielle linéaire.

En pratique, l'équation différentielle est utilisée pour les calculs, et la caractérisation de la définition pour les preuves d'existence.

#### 1.3. Suites P-récurrentes.

**DÉFINITION 16.** Une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  d'éléments d'un corps  $\mathbb{K}$  est appelée suite polynomialement récurrente (ou P-récurrente) si elle satisfait une récurrence de la forme

$$(1) \quad p_d(n)a_{n+d} + p_{d-1}(n)a_{n+d-1} + \dots + p_0(n)a_n = 0, \quad n \geq 0,$$

où les  $p_i$  sont des polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ .

De la même manière, on peut parler de l'espace vectoriel de dimension finie engendré par la suite et ses décalées.

## 2. Équivalence entre séries D-finies et suites P-récurrentes

THÉORÈME 8. *Une série formelle est D-finie si et seulement si la suite de ses coefficients est P-récurrente.*

DÉMONSTRATION. Soit  $A(X) = a_0 + a_1X + \dots$  une série D-finie et

$$(2) \quad q_0(X)A^{(m)}(X) + \dots + q_m(X)A(X) = 0$$

une équation différentielle qui l'annule. En notant  $[X^n]f(X)$  le coefficient de  $X^n$  dans la série  $f(X)$  avec la convention que ce coefficient est nul pour  $n < 0$ , on a pour  $n \geq 0$

$$(3) \quad [X^n]f'(X) = (n+1)[X^{n+1}]f(X), \quad [X^n]X^k f(X) = [X^{n-k}]f(X).$$

Par conséquent, l'extraction du coefficient de  $X^n$  de (2) fournit une récurrence linéaire sur les  $a_n$  valide pour tout  $n \geq 0$  avec la convention  $a_k = 0$  pour  $k < 0$ . Pour obtenir une récurrence de la forme (1) il faut décaler les indices de  $n_0 := \max_{0 \leq i \leq m} (\deg q_i + i - m)$  s'il est strictement positif. Les équations obtenues alors pour les indices moindres fournissent des contraintes linéaires sur les premiers coefficients  $a_n$  pour qu'ils correspondent aux coefficients d'une série solution de (2).

À l'inverse, soit  $(a_n)$  une suite vérifiant la récurrence (1). Les identités analogues à (3) sont maintenant

$$\sum_{n \geq 0} n^k a_n X^n = \left( X \frac{d}{dX} \right)^k A(X), \quad \sum_{n \geq 0} a_{n+k} X^n = (A(X) - a_0 - \dots - a_{k-1} X^{k-1}) / X^k,$$

où  $A$  est la série génératrice des coefficients  $a_n$  et la notation  $(Xd/dX)^k$  signifie que l'opérateur  $Xd/dX$  est appliqué  $k$  fois. En multipliant (1) par  $X^n$  et en sommant pour  $n$  allant de 0 à  $\infty$ , puis en multipliant par une puissance de  $X$  on obtient donc une équation différentielle linéaire de la forme

$$q_0(X)A^{(d)}(X) + \dots + q_d(X)A(X) = p(X),$$

où le membre droit provient des conditions initiales. Il est alors possible, quitte à augmenter l'ordre de l'équation de 1, de faire disparaître ce membre droit, par une dérivation et une combinaison linéaire.  $\square$

Ce calcul permet aussi d'observer le résultat suivant.

LEMME 5. *Si  $A(X)$  est une série D-finie solution de (2) et  $q_0(0) \neq 0$ , alors le coefficient de tête de la récurrence (1) satisfaite par ses coefficients est le polynôme  $q_0(0)(n+1) \cdots (n+m)$ .*

DÉMONSTRATION. D'après (3), un terme  $cX^i A^{(j)}(X)$  intervient dans la récurrence sur les coefficients sous la forme  $c(n-i+1) \cdots (n-i+j)a_{n-i+j}$ . L'indice maximal est donc atteint pour  $j-i$  maximal et donc pour  $j = m$  si  $i = 0$ .  $\square$

EXEMPLE 6. L'équation  $y' - x^k y = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) donne la récurrence  $(n+1)a_{n+1} - a_{n-k} = 0$  valide pour tout  $n \geq 0$  avec la convention que les  $a_n$  d'indice négatif sont nuls. On en déduit que  $a_0$  est libre, puis les contraintes  $a_1 = \dots = a_k = 0$ , et les coefficients suivants sont fournis par la récurrence décalée  $(n+k+1)a_{n+k+1} - a_n = 0$ , valide pour  $n \geq 0$ . On reconnaît ainsi les coefficients de  $a_0 \exp(x^{k+1}/(k+1))$ .

### 3. Test d'égalité

LEMME 6. *Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites solutions de (1),  $u_0 = v_0, \dots, u_{d-1} = v_{d-1}$  et  $0 \notin p_d(\mathbb{N})$ , alors ces suites sont égales.*

DÉMONSTRATION. Par récurrence, puisque  $0 \notin p_d(\mathbb{N})$  permet d'inverser le coefficient de tête de la récurrence et donc d'exprimer chaque terme à partir de l'indice  $d$  en fonction des précédents.  $\square$

COROLLAIRE 4. *Si  $f(X)$  et  $g(X)$  sont deux séries formelles solutions de (2),  $f(0) = g(0), \dots, f^{(m-1)}(0) = g^{(m-1)}(0)$  et  $q_0(0) \neq 0$ , alors ces séries sont égales.*

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 5, le coefficient de tête de la récurrence sur les coefficients des solutions séries formelles de (2) ne s'annule pas sur  $\mathbb{N}$ . Les contraintes linéaires sur les conditions initiales jusqu'à l'indice  $n_0$  introduit dans la preuve du Théorème 8 définissent les coefficients d'indice  $m$  à  $m + n_0$  à partir des précédents et le Lemme 6 s'applique pour les valeurs suivantes.  $\square$

### 4. Somme et Produit

THÉORÈME 9. *L'ensemble des séries D-finies à coefficients dans un corps  $\mathbb{K}$  est une algèbre sur  $\mathbb{K}$ . L'ensemble des suites P-récurrentes d'éléments de  $\mathbb{K}$  est aussi une algèbre sur  $\mathbb{K}$ .*

DÉMONSTRATION. Les preuves pour les suites et les séries sont similaires. Les preuves pour les sommes sont plus faciles que pour les produits, mais dans le même esprit. Nous ne donnons donc que la preuve pour le produit  $h = fg$  de deux séries D-finies  $f$  et  $g$ . Par la formule de Leibniz, toutes les dérivées de  $h$  s'écrivent comme combinaisons linéaires de produits entre une dérivée  $f^{(i)}$  de  $f$  et une dérivée  $g^{(j)}$  de  $g$ . Les dérivées de  $f$  et de  $g$  étant engendrées par un nombre fini d'entre elles, il en va de même pour les produits  $f^{(i)}g^{(j)}$ , ce qui prouve la D-finitude de  $h$ .  $\square$

En outre, cette preuve permet de borner l'ordre des équations : l'ordre de l'équation satisfaite par une somme est borné par la somme des ordres des équations satisfaites par les sommants, et l'ordre de l'équation satisfaite par un produit est borné par le produit des ordres.

Cette preuve donne également un algorithme pour trouver l'équation différentielle (resp. la récurrence) cherchée : il suffit de calculer les dérivées (resp. les décalées) successives en les récrivant sur un ensemble fini de générateurs. Une fois leur nombre suffisant (c'est-à-dire au pire égal à la dimension plus 1), il existe une relation linéaire entre elles. À partir de la matrice dont les lignes contiennent les coordonnées des dérivées successives (resp. des décalés successifs) sur cet ensemble fini de générateurs, la détermination de cette relation se réduit alors à celle du noyau de la transposée.

EXEMPLE 7. Voici comment prouver (et même découvrir) l'identité

$$\arcsin(x)^2 = \sum_{k \geq 0} \frac{k!}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdots \left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{x^{2k+2}}{2k+2}.$$

Le calcul consiste à partir d'une équation satisfaite par  $\arcsin(x)$ , en déduire une équation satisfaite par son carré, traduire cette équation en récurrence sur les coefficients, et conclure en constatant que cette récurrence est satisfaite par les coefficients de la série.

Le point de départ est la propriété  $(\arcsin(x))' = 1/\sqrt{1-x^2}$ , qui permet de représenter  $\arcsin$  par l'équation différentielle  $(1-x^2)y'' - xy' = 0$  avec les conditions initiales  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

Ensuite, en posant  $h = y^2$ , les dérivations et réductions successives donnent

$$\begin{aligned} h' &= 2yy', \\ h'' &= 2y'^2 + 2yy'' = 2y'^2 + \frac{2x}{1-x^2}yy', \\ h''' &= 4y'y'' + \frac{2x}{1-x^2}(y'^2 + yy'') + \left( \frac{2}{1-x^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} \right) yy', \\ &= \left( \frac{4x}{1-x^2} + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} \right) yy' + \frac{2x}{1-x^2}y'^2. \end{aligned}$$

Les quatre vecteurs  $h, h', h'', h'''$  sont combinaisons linéaires des trois vecteurs  $y^2, yy', y'^2$ . Ils sont donc liés et une relation de liaison s'obtient en calculant le noyau de la matrice  $3 \times 4$  qui découle de ce système. Le résultat est

$$(1-x^2)h''' - 3xh'' - h' = 0.$$

La récurrence qui s'en déduit est

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+3} - (n+1)^3a_{n+1} = 0.$$

Comme le facteur  $(n+1)$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{N}$ , il est possible de simplifier pour obtenir la récurrence équivalente

$$(n+2)(n+3)a_{n+3} - (n+1)^2a_{n+1} = 0.$$

La vérification que les coefficients de la série ci-dessus vérifient cette identité est facile.

## 5. Séries algébriques

**THÉORÈME 10.** *Si la série  $Y(X)$  annule un polynôme  $P(X, Y)$  de degré  $d$  en  $Y$ , alors elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre au plus  $d$ .*

**DÉMONSTRATION.** La preuve est algorithmique. Quitte à diviser d'abord  $P$  par son pgcd avec sa dérivée  $P_Y$  par rapport à  $Y$ , il est possible de le supposer premier avec  $P_Y$  (car la caractéristique est nulle!). En dérivant  $P(X, Y) = 0$  et en isolant  $Y'$ , il vient

$$Y' = -\frac{P_X}{P_Y}.$$

Par *inversion modulaire* de  $P_Y$  (voir le Cours 5), cette identité se réécrit via un calcul de pgcd étendu en

$$Y' = R_1(Y) \bmod P,$$

où  $R_1$  est un polynôme en  $Y$  de degré au plus  $d$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}(X)$ . Ceci signifie que  $Y'$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $1, Y, Y^2, \dots, Y^{d-1}$  à coefficients dans  $\mathbb{K}(X)$ . Dériver à nouveau cette équation, puis réécrire  $Y'$  et prendre le reste de la division par  $P$  mène à nouveau à une telle combinaison linéaire pour  $Y''$  et plus généralement pour les dérivées successives de  $Y$ . Les  $d+1$  vecteurs  $Y, Y', \dots, Y^{(d)}$  sont donc linéairement dépendants et la relation de liaison est l'équation cherchée.  $\square$

Les mêmes arguments que ci-dessus mènent à une autre propriété de clôture des séries  $D$ -finies.

**COROLLAIRE 5.** *Si  $f$  est une série  $D$ -finie et  $y$  une série algébrique sans terme constant, alors  $f \circ y$  est  $D$ -finie.*

La preuve consiste à observer que les dérivées successives de  $f \circ y$  s'expriment comme combinaisons linéaires des  $f^{(i)}(y)y^j$  pour un nombre fini de dérivées de  $f$  (par  $D$ -finitude) et de puissances de  $y$  (par la même preuve que pour le théorème 10). Cette preuve fournit encore un algorithme.