

Accélération de convergence

Résumé

L'accélération de convergence est une technique d'analyse numérique qui s'avère utile en calcul formel, en conjonction avec la précision arbitraire et les outils de conjecture à base de l'algorithme LLL. Ce cours présente les principes de base des grandes familles de méthodes d'accélération de convergence.

1. Introduction

Le principe de l'accélération de convergence est assez simple : on connaît une suite réelle $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une valeur S_∞ et on cherche une nouvelle suite T_n qui tende aussi vers S_∞ , mais (beaucoup) plus rapidement. Autrement dit, $T_n - S_\infty = o(S_n - S_\infty)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Il est possible de trouver de telles suites T_n si l'on dispose d'hypothèses supplémentaires sur la régularité avec laquelle S_n tend vers sa limite.

2. Exemple : Archimède, Huygens et le calcul de π

2.1. La suite à accélérer. Pour encadrer π , le point de départ de la méthode d'Archimède consiste à considérer deux polygones réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle de rayon 1. Une petite figure permet de se convaincre que pour tout n , ces polygones ont pour périmètres $2n \sin \pi/n$ et $2n \tan \pi/n$, d'où découle l'inégalité suivante

$$n \sin \frac{\pi}{n} < \pi < n \tan \frac{\pi}{n}.$$

Ensuite, Archimède, avec bien moins d'outils que ce dont nous disposons, se rend compte qu'il est possible de calculer simultanément les éléments des deux suites $s_k := \sin(\alpha/2^k)$ et $t_k := \tan(\alpha/2^k)$ à l'aide des relations

$$\frac{1}{\tan \frac{x}{2}} = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x} \quad \text{et} \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{2}}}.$$

À l'aide de ces relations, et en partant de $\alpha = \pi/3$, Archimède pousse le calcul jusqu'à $k = 5$, ce qui correspond à des polygones à 96 côtés !

Exercice 1. Réaliser ce calcul en Maple. En déduire un encadrement de π qui donne ses 3 premières décimales.

2.2. Principe de l'accélération. Le développement de Taylor de \tan donne directement le développement asymptotique

$$n \tan \frac{\pi}{n} = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Lorsque l'angle est divisé par 2, n est doublé, ce qui mène à

$$2n \tan \frac{\pi}{2n} = \pi + \frac{1}{4} \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

L'idée de la méthode consiste à éliminer le terme en $1/n^2$ par une combinaison linéaire. Si $t_k^{(0)} := 3 \cdot 2^k \tan(\pi/(3 \cdot 2^k))$, une suite à convergence plus rapide est ainsi fournie par

$$t_k^{(1)} := \frac{4t_{k+1}^{(0)} - t_k^{(0)}}{3} = \pi + O\left(\frac{1}{16^k}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Cette idée, jointe à une manipulation analogue sur le sinus, est due à Huygens qui s'en est servi en 1654 pour calculer 35 décimales de π .

Exercice 2. Calculer à l'aide de Maple les éléments de ces suites que l'on déduit de ceux de l'exercice précédent.

De nombreuses années plus tard, en 1936, Kommerel se rend compte qu'il est possible de réitérer cette transformation, en considérant cette fois

$$t_k^{(2)} := \frac{16t_{k+1}^{(1)} - t_k^{(1)}}{15} = \pi + O\left(\frac{1}{64^k}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Exercice 3. Calculer non seulement les premiers éléments de cette suite et ceux de la suite analogue pour les polygones inscrits, mais aussi ceux des suites $t_k^{(3)}, t_k^{(4)}, t_k^{(5)}$ dont il faut d'abord déterminer la bonne définition.

3. Méthodes d'extrapolation linéaires

Le calcul de Huygens est un cas particulier des méthodes d'extrapolation linéaires. Le terme *linéaire* qualifie ici l'application d'accélération envoyant une suite sur une suite accélérée, et on parle d'extrapolation pour signifier que l'on cherche à déterminer une valeur en dehors du domaine des valeurs de départ.

3.1. Méthode d'Euler. Il s'agit sans doute de la plus vieille des méthodes d'accélération. Elle s'applique à des suites dont le comportement asymptotique est de la forme suivante (ou est supposé l'être) :

$$S_n = S_\infty + r^n \varphi(n) \quad \text{avec} \quad \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \rightarrow 1 \text{ et } r \neq 1 \text{ connu.}$$

(La convergence exige en outre $|r| \leq 1$.)

L'accélération repose sur le principe simple suivant.

Proposition 1. Dans une telle situation, la suite $T_n := (S_{n+1} - rS_n)/(1 - r)$ vérifie $T_n - S_\infty = o(S_n - S_\infty)$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de développer :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{S_{n+1} - rS_n}{1 - r} \\ &= S_\infty + \frac{r^{n+1}}{1 - r} (\varphi(n+1) - \varphi(n)) \\ &= S_\infty + \frac{r^{n+1}}{1 - r} \underbrace{\varphi(n) \left(\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} - 1 \right)}_{o(\varphi(n))}. \end{aligned}$$

□

Exemple 1. La série géométrique peut être accélérée par cette méthode. Si $S_n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n$, alors le choix $r = \alpha$ donne $T_n = S_\infty$.

La méthode d'Euler consiste à réitérer ce procédé pour obtenir une suite de suites accélérées en posant

$$(1) \quad T_n^{(0)} := S_n, \quad T_n^{(k)} := \frac{T_{n+1}^{(k-1)} - rT_n^{(k-1)}}{1 - r}, \quad (k \geq 1).$$

Exercice 4. Utiliser cette méthode (en Maple) avec $r = -1$ pour calculer des décimales de $\ln 2$ donné comme limite de la suite

$$S_n = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i+1}.$$

On demande de calculer les 6 premières décimales de $\ln 2$ en partant seulement des 10 premières valeurs S_1, \dots, S_{10} .

Exercice 5. Appliquer les mêmes opérations sur la suite pourtant divergente

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{2^{i+1}}{i+1}.$$

Comparer à $\ln 3$.

3.2. Méthode de Richardson (1910). Il s'agit d'une généralisation de la méthode précédente au cas où la suite se comporte comme

$$(2) \quad S_n = S_\infty + c_1 r_1^n + \dots + c_k r_k^n,$$

les r_i étant connus, distincts, différents de 1, et de module décroissant. Le principe est ici d'éliminer les r_i les uns après les autres par la Proposition 1. Pour ceci, on suit un procédé de construction itératif :

$$(3) \quad T_n^{(0)} := S_n, \quad T_n^{(i)} = \frac{T_{n+1}^{(i-1)} - r_i T_n^{(i-1)}}{1 - r_i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Exemple 2. L'accélération du calcul de π dans la section précédente est une accélération de Richardson avec $r_1 = 1/4, r_2 = 1/16, \dots$

Le terme $T_n^{(k)}$ est appelé *transformée de Richardson* de S_n . La suite $T_n^{(k)}$ converge (en n) vers S_∞ plus vite que S_n puisque les termes résiduels ont été amortis un à un. Plus la valeur de k est élevée, plus l'accélération est rapide (on a amorti plus de termes). Une autre formulation de $T_n^{(k)}$ est fournie par les formules

de Cramer : le système linéaire est fourni par (2) évalué en $n, n+1, \dots, n+k$ ayant pour inconnues S_∞ et les c_i . Il s'ensuit une expression en terme de déterminants :

$$T_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} S_n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n+k} & r_1^k & \dots & r_k^k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_1^k & \dots & r_k^k \end{vmatrix}}.$$

3.3. Convergence plus lente. Dans le cas très fréquent où la convergence de la suite est de la forme

$$S_n = S_\infty + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \dots,$$

la méthode d'Euler ne s'applique pas directement puisqu'il faudrait prendre $r = 1$. L'idée est alors de poser d'abord $\widetilde{S}_n = S_{2^n}$, ce qui permet alors d'utiliser la méthode de Richardson avec $r_i = 1/2^i$. L'équation (3) devient alors

$$T_n^{(0)} = S_{2^n}, \quad T_n^{(k+1)} := \frac{2^{k+1}T_{n+1}^{(k)} - T_n^{(k)}}{2^{k+1} - 1}.$$

Exercice 6. Employer cette méthode pour calculer une dizaine de décimales de la constante γ d'Euler, définie comme limite de la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$

3.4. Méthode de Romberg (1955). C'est la méthode précédente, appliquée au calcul d'une intégrale par la méthode des trapèzes. La suite S_n est alors

$$S_n = \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Exercice 7. Calculer de cette manière quelques décimales de $4 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

4. Méthodes non-linéaires

4.1. Méthode Δ^2 d'Aitken (1926). Cette méthode s'applique aux suites dont le comportement est de la forme

$$S_n = S_\infty + r^n \varphi(n), \quad \text{avec} \quad \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} \longrightarrow 1,$$

mais cette fois-ci, r n'est pas supposé connu. La méthode peut être vue comme un calcul simultané de r et de l'accélération d'Euler.

Pour approcher r , on considère la suite

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = r^n (r\varphi(n+1) - \varphi(n)).$$

La notation Δ est classique pour cet opérateur aux différences. On observe alors que $\Delta S_{n+1}/\Delta S_n \longrightarrow r$. Cette propriété est très utile, même en relation avec des méthodes linéaires : si l'on parvient à identifier r en contemplant les premières valeurs de cette suite, alors il vaut mieux exploiter cette valeur.

La transformée d'Aitken consiste donc naturellement à appliquer la Proposition 1, mais en remplaçant r par sa valeur approchée ci-dessus, ce qui donne

$$T_n = \frac{S_{n+1} - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} S_n}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = S_n - \frac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}.$$

Ici, Δ^2 désigne la composition de l'opérateur Δ avec lui-même : $\Delta^2 u_n = \Delta(u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$.

Exercice 8. Calculer numériquement la limite de

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{F_k}{2^k},$$

où les F_k sont les nombres de Fibonacci définis par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ pour $k \geq 0$.

4.2. Méthode de Shanks (1949). La méthode de Shanks est à la méthode d'Aitken ce que la méthode de Richardson est à la méthode d'Euler : il s'agit d'éliminer plusieurs termes perturbateurs, mais cette fois-ci les r_i sont inconnus. Alors que la méthode d'Aitken peut se récrire

$$T_n = \frac{\begin{vmatrix} S_n & S_{n+1} \\ S_{n+1} & S_{n+2} \end{vmatrix}}{|\Delta^2 S_n|},$$

le cas général devient

$$T_n^{(k)} = \frac{\begin{vmatrix} S_n & \dots & S_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n+k} & \dots & S_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta^2 S_n & \dots & \Delta^2 S_{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta^2 S_{n+k-1} & \dots & \Delta^2 S_{n+2k-2} \end{vmatrix}}.$$

Comme ci-dessus, la vitesse de convergence augmente avec k . Cette méthode était semble-t-il déjà connue de Jacobi.

4.3. Algorithme ε de Wynn (1956). L'algorithme de Wynn réalise la transformation de Shanks par une récurrence qui évite le calcul de déterminants.

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0, \quad \varepsilon_0^{(n)} = S_n, \quad \varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)}}.$$

Nous admettons alors le résultat suivant.

Théorème 2. $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ est le $T_n^{(k)}$ de la méthode de Shanks.

Bibliographie

- [1] Brezinski (Claude). – *Accélération de la convergence en analyse numérique*. – Springer-Verlag, 1977, *Lectures Notes in Mathematics*, vol. 584.
- [2] Laurie (Dirk). – *The SIAM 100-digit challenge*, Chapter Convergence acceleration, pp. xii+306. – Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2004. A study in high-accuracy numerical computing, With a foreword by David H. Bailey.