

## COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : TP 8

### LA MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE ET LES SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES

#### 1. LA MOYENNE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

Si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $0 \leq b \leq a$ , les deux suites définies par

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad a_0 = a, \quad b_0 = b$$

ont une limite commune dont l'existence se déduit de  $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$  et

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left( \frac{a_n - b_n}{2} \right)^2.$$

Cette limite est notée  $M(a, b)$ . Cette fonction est clairement homogène : pour  $\lambda > 0$ ,  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$  ce qui permet de concentrer l'étude sur la fonction de une variable  $M(1, x)$ , dont on admet qu'elle est analytique au voisinage de  $x = 1$ .

- (1) Dédurre de l'homogénéité et de  $M(a_1, b_1) = M(a_0, b_0)$  avec  $a_0 = 1 + x$  et  $b_0 = 1 - x$  une équation fonctionnelle satisfaite par  $M(1, \cdot)$  ;
- (2) Utiliser cette équation fonctionnelle pour calculer les 10 premiers coefficients de Taylor de la fonction  $A(x) = 1/M(1, \sqrt{1-x})$  (ou  $M(1, x) = 1/A(1-x^2)$ ) à l'origine ;
- (3) Utiliser ces coefficients pour conjecturer une équation différentielle linéaire satisfaite par  $A(x)$  ;
- (4) En utilisant la clôture des solutions d'équations différentielles linéaires par substitution algébrique, prouver que la série solution de cette équation différentielle avec les conditions initiales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1/4$  satisfait l'équation fonctionnelle satisfaite par  $A$  ;
- (5) La série hypergéométrique est définie comme

$$F(a, b; c; z) := \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{où } (x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1).$$

Calculer une récurrence satisfaite par les coefficients de Taylor de  $A(x)$  et en déduire l'identité (due à Gauss)

$$M(a, b) = \frac{a}{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1 - \frac{b^2}{a^2})}.$$

#### 2. LA RELATION DE LEGENDRE SUR LES INTÉGRALES ELLIPTIQUES

Les *intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce* sont

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}, \quad E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

- (6) Calculer une récurrence linéaire satisfaite par les intégrales

$$B_n = \int_0^1 \frac{t^{2n} dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

- (7) En calculant une récurrence sur les coefficients du développement des intégrandes par rapport à  $k$  puis sur ceux de l'intégrale terme à terme, en déduire que pour  $|k| < 1$ ,

$$K(k) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad E(k) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

En conclure, après Gauss, que  $K(k)$  peut se calculer par une moyenne arithmético-géométrique ( $\pi$  étant donné).

Les questions qui suivent permettent de prouver la *relation de Legendre*, qui s'écrit

$$E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2}, \quad \text{avec } k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

- (8) En considérant les récurrences satisfaites par leurs coefficients montrer que  $F(x) := \frac{2}{\pi} K(\sqrt{x})$  et  $G(x) := \frac{2}{\pi} E(\sqrt{x})$  sont liés par

$$G(x) = (1 - x)(2xF'(x) + F(x));$$

- (9) Injecter cette valeur de  $G$  dans le membre gauche de la relation de Legendre pour constater que celle-ci se réécrit

$$x(1 - x) \begin{vmatrix} F(x) & F(1 - x) \\ F'(x) & F'(1 - x) \end{vmatrix} = \text{cte};$$

- (10) Observer que  $F(x)$  et  $F(1 - x)$  sont toutes deux solutions d'une même équation différentielle linéaire d'ordre 2 et en déduire l'existence de cette constante ;

- (11) Pour obtenir le membre droit de la relation de Legendre en faisant tendre  $k$  vers 0, on admettra que

$$K(k') = -\ln(k) + 2 \ln 2 + O(k^2 \ln k), \quad k \rightarrow 0.$$

- (12) Déduire de la relation de Legendre une relation entre  $K(1/\sqrt{2})$ ,  $E(1/\sqrt{2})$  et  $\pi/2$ .

### 3. L'ALGORITHME DE BRENT-SALAMIN POUR LE CALCUL DE $\pi$

En introduisant la suite  $T_n = 2^n a_n (E(b_n/a_n) - K(b_n/a_n))$  et en établissant que  $T_{n+1} - T_n = 2^n c_n^2 K(b/a)$ , on obtient l'identité suivante que l'on admettra :

$$(1) \quad E(k) = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2\right) K(k),$$

où  $c_k := \sqrt{a_k^2 - b_k^2} = c_{k-1}^2 / (4a_k)$ .

En mettant ensemble les équations des questions (7), (12) et celle ci-dessus, on obtient finalement

$$\frac{\pi^2}{4M^2(1, 1/\sqrt{2})} \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_n^2\right) = \frac{\pi}{2},$$

base de l'algorithme de Brent-Salamin pour le calcul de  $\pi$ . La moyenne arithmético-géométrique convergeant quadratiquement (grosso modo, le nombre de décimales correctes double à chaque étape), il s'agit du meilleur algorithme connu du point de vue de la complexité. L'itération est donnée par :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n, \quad \pi_n := \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum_{k=0}^n 2^k c_k^2},$$

où les  $a_k$  et  $b_k$  sont les suites de la moyenne arithmético-géométrique pour  $a_0 = 1$  et  $b_0 = 1/\sqrt{2}$ . Pour obtenir une bonne complexité, il faut disposer d'une multiplication rapide et calculer inverse et racine carrée par itération de Newton.

- (13) Calculer  $\pi_n$  pour  $n = 1, \dots, 7$  avec 60 décimales de précision ;

- (14) Pour bénéficier d'arithmétique rapide en Maple, il vaut mieux effectuer les calculs sur des entiers que sur des flottants. Il suffit pour cela de démarrer le calcul avec  $a_0 = 10^D$ ,  $b_0 = \sqrt{10^{2D}/2}$  où  $D$  est de l'ordre du nombre de décimales cherchées et d'utiliser des entiers tout au long du calcul (via `iquo` et `isqrt`). Écrire cette itération et la tester avec  $D = 10^4$ ,  $D = 2 \cdot 10^4$ ,  $D = 4 \cdot 10^4$ , et observer l'évolution du temps de calcul avec  $D$ .