

## COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : TP 9

### SÉRIES POUR LA FONCTION ZÊTA DE RIEMANN AUX ENTIERS POSITIFS

La fonction  $\zeta$  de Riemann est définie pour  $\Re s > 1$  par

$$(Z) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Cette série converge, mais sa vitesse de convergence n'est pas très élevée. Il existe des formules plus rapides, dont beaucoup ont été prouvées dans les dix dernières années via l'algorithme de Zeilberger.

#### 1. UNE PREMIÈRE SÉRIE POUR $\zeta(3)$

Andrei Andreevich Markov a prouvé en 1890 l'identité

$$(Z_3) \quad \zeta(3) = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n} n^3}.$$

- (1) Évaluer numériquement les vingt premiers sommants, et la somme. En déduire la précision obtenue. Comparer au résultat de l'évaluation des mille premiers sommants de  $(Z)$  en  $s = 3$ .

Pour prouver  $(Z_3)$ , l'algorithme de Zeilberger part de

$$(A) \quad F_{n,k} = \frac{(-1)^k k!^2 (n-k-1)!}{(n+k+1)!(k+1)}.$$

- (2) Calculer une suite  $G_{n,k}$  telle que

$$F_{n+1,k} - F_{n,k} = G_{n,k+1} - G_{n,k}.$$

(On pourra utiliser l'implantation de l'algorithme de Zeilberger disponible en Maple dans le package `SumTools`).

- (3) (Cette question n'utilise pas de calcul formel, et pourra être admise dans un premier temps). En sommant cette identité d'abord de  $k = 0$  à  $n - 1$ , puis de  $n = 0$  à l'infini, montrer que si les sommes concernées convergent, alors

$$(S_1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,0} = \sum_{n \geq 0} (G_{n,n} + F_{n+1,n}).$$

- (4) En déduire l'équation  $(Z_3)$  en faisant attention aux formes indéterminées.
- (5) (À la fin, s'il reste du temps). Vérifier les convergences requises sur l'exemple.

## 2. UNE FAMILLE DE SÉRIES DE PLUS EN PLUS RAPIDEMENT CONVERGENTES

(6) Calculer le comportement asymptotique du  $n^{\text{e}}$  sommant de  $(Z_3)$ .

Une généralisation de  $(Z_3)$  proposée par Amdeberhan en 1996 part de

$$F_{n,k} = \frac{(-1)^k k!^2 (sn - k - 1)!}{(sn + k + 1)! (k + 1)}.$$

Le cas particulier  $s = 1$  redonne  $(A)$ .

(7) Appliquer la même méthode que ci-dessus pour  $s = 2$ . En déduire une représentation sommatoire de  $\zeta(3)$ . Calculer le comportement asymptotique du  $n^{\text{e}}$  sommant.

(8) Recommencer avec  $s = 3$ .

3. D'AUTRES VALEURS DE  $\zeta(2n + 3)$ 

De nombreuses identités plus ou moins récentes existent également sur les valeurs  $\zeta(2n+3)$ <sup>1</sup>. Un article de 2008 de Kh. et T. Hessami Pilehrood montre comment obtenir certaines de ces identités par l'algorithme de Zeilberger.

(9) Appliquer l'algorithme de Zeilberger à

$$F_{n,k} = \frac{(-1)^n (1+a)_n (1-a)_n}{\Gamma(1+a)\Gamma(1-a)} \frac{k!}{(2n+k+1)!((n+k+1)^2 - a^2)},$$

où  $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$  est le symbole de Pochhammer.

(10) En sommant d'abord sur  $n \geq 0$ , puis sur  $k \geq 0$ , on obtient comme en question 3

$$(S_2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} F_{0,k} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{n,0}.$$

Vérifier que la formule obtenue est équivalente à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k^2 - a^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+a)_n (1-a)_n (5(n+1)^2 - a^2)}{(2n+2)!(2n+2)((n+1)^2 - a^2)}.$$

(11) Développer en série par rapport à  $a$  et obtenir par extraction des coefficients de  $a$  non seulement l'identité  $(Z_3)$ , mais une identité pour  $\zeta(5)$ . (On pourrait bien sûr continuer et obtenir des formules pour tous les  $\zeta(2n+3)$ ).

(12) La généralisation suivante étend la convergence du cas  $s = 2$  de la question 7 à tous les  $\zeta(2n+3)$ . Mener le calcul en partant de

$$F_{n,k} = \frac{(-1)^n k! (n-1)! (2n)! (1+a)_k (1-a)_k (1+a)_n (1-a)_n (1+a)_{2n} (1-a)_{2n}}{(2n+k+1)! (3n-1)! (1+a)_{2n+k+1} (1-a)_{2n+k+1}}.$$

<sup>1</sup>Les valeurs de  $\zeta$  aux entiers pairs sont connues depuis Euler : elle s'écrivent

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{2(2n)!} (2\pi)^{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

où les constantes  $B_{2n}/(2n)!$  sont les coefficients de la série  $z/(\exp(z) - 1)$ , et les  $B_n$  sont appelés *nombre de Bernoulli*.