

COURS DE CALCUL FORMEL EN M1: TP 14

CHEMINS DE KREWERAS

RÉSUMÉ. En 1965, Germain Kreweras trouva une formule remarquablement simple pour le nombre de chemins planaires partant et retournant à l'origine, confinés au quart de plan \mathbb{N}^2 et constitués de trois types de pas : Sud \downarrow , Ouest \leftarrow et Nord-Est \nearrow . Cette preuve nécessita pas moins de 100 pages[‡]. Le but de ce TP est de retrouver et de démontrer le résultat de Kreweras à l'aide d'outils de calcul formel.

1. INTRODUCTION

Un *chemin de Kreweras* est un chemin planaire confiné au quart de plan \mathbb{N}^2 , partant de l'origine $(0,0)$ et constitué de trois types de pas : Sud \downarrow , Ouest \leftarrow et Nord-Est \nearrow . Le nombre de chemins de Kreweras de longueur n (i.e. utilisant n pas) aboutissant au point $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ est noté $f(n; i, j)$. On appelle *excursion de Kreweras* un chemin de Kreweras retournant à l'origine. Une telle excursion est représentée en Figure 1. Le nombre $f(n; 0, 0)$ d'excursions de Kreweras de longueur n sera noté $a(n)$. Le but du problème est de conjecturer une formule close pour $a(n)$ et de la prouver.

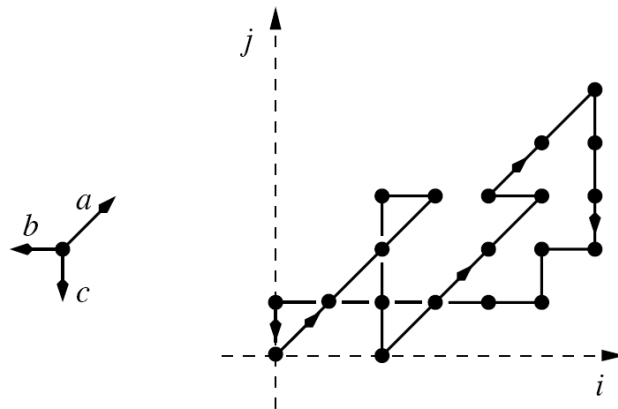


FIGURE 1. Exemple d'excursion de Kreweras, de longueur 24.

2. CONJECTURES SUR LES EXCURSIONS

- (1) Calculer le nombre d'excursions $a(n)$ pour $0 \leq n \leq 50$. Pour vérification, vous devez obtenir : $a(0) = 1, a(9) = 192, a(21) = 15876096$.
- (2) Des arguments combinatoires permettent de supposer que la suite $a(3n)$ se comporte asymptotiquement en

$$a(3n) = Kn^\alpha \rho^n (1 + a/n + b/n^2 + \dots), \quad n \rightarrow \infty.$$

Utiliser des techniques d'accélération de convergence pour conjecturer des valeurs rationnelles simples pour ρ , puis α , dans cet ordre. (Indication : considérer $\ln a(3n)$.)

[‡] G. Kreweras, *Sur une classe de problèmes liés au treillis des partitions d'entiers*. Cahiers du B.U.R.O. 6 (1965), pp. 5–105.

- (3) Utiliser `gfun` (récupérer une version récente sur <http://algo.inria.fr/libraries/papers/gfun.html>) pour conjecturer une récurrence satisfaite par la suite $a(n)$ puis une formule explicite pour cette suite.
- (4) Vérifier que cette formule conforte l'asymptotique de la question (2).
- (5) À partir des valeurs $a(3n)$ pour $n = 0, \dots, 10$, deviner un polynôme dont la série génératrice $A(t) = \sum_{n \geq 0} a(3n)t^n$ est solution.
- (6) Résoudre ce polynôme, en exhibant une formule par radicaux pour son unique solution $B(t)$ telle que $B(0) = 1$.
- (7) Écrire une procédure prenant un entier positif N en argument et renvoyant les N premiers termes du développement en série à l'origine de $B(t)$ à l'aide d'une itération de Newton. Vérifier qu'ils coïncident avec ceux de $A(t)$.
- (8) Calculer une équation implicite $R(t, T)$ de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} t = (u + 2)/u^3 \\ T = -u(u + 6)/8. \end{cases}$$

Quel rapport y a-t-il entre R et le polynôme de la question (5) ?

3. CONJECTURES SUR LES CHEMINS ARBITRAIRES

Pour aller plus loin, on introduit la série génératrice à trois variables

$$F(t; x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} f(n; i, j) x^i y^j \right) t^n.$$

Puisque $f(n; i, j) = 0$ pour $i > n$ ou $j > n$, la somme portant sur i et j est un polynôme en x et y pour toute valeur de n . Par conséquent, $F(t; x, y)$ appartient à $\mathbb{Q}[x, y][[t]]$.

La récurrence satisfaite par la suite $f(n; i, j)$, se traduit alors en termes de séries génératrices par le fait que $F(t; x, y)$ vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \text{(K)} \quad & K(t; x, y)F(t; x, y) = xy - xtF(t; x, 0) - ytF(t; 0, y), \\ & \text{avec } K(t; x, y) = xy - t(x + y + x^2y^2). \end{aligned}$$

L'égalité (K) s'appelle *l'équation du noyau* ; la fonction $K(t; x, y)$ est son *noyau*.

- (9) Écrire trois procédures, permettant le calcul des séries tronquées :

$$F(t; x, y) \bmod t^n, \quad F(t; x, 0) \bmod t^n, \quad F(t; 0, y) \bmod t^n.$$

Pour vérification, le début de la série $F(t; x, 0)$ est

$$1 + xt^2 + 2t^3 + 2x^2t^4 + 8xt^5 + (16 + 5x^3)t^6 + 30x^2t^7 + (96x + 14x^4)t^8 + (192 + 112x^3)t^9 + O(t^{10}).$$

La symétrie de l'ensemble des pas {Sud ↓, Ouest ← et Nord-Est ↗} par rapport à la diagonale principale $\{(i, i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ de \mathbb{N}^2 implique que $f(n; i, j) = f(n; j, i)$ pour tout triplet (n, i, j) d'entiers positifs. Au niveau des séries génératrices, cela se traduit par l'égalité $F(t; x, y) = F(t; y, x)$. En particulier, l'étude de $F(t; 0, y)$ se ramène à celle de $F(t; x, 0)$.

- (10) À partir des 80 premiers termes de la série $F(t; x, 0)$, deviner un polynôme P_{x0} annulant cette série à précision 100.
- (11) Vérifier que $P_{x0}(T, t, 0)$ coïncide, à normalisation près, avec le polynôme deviné en question (5) et annulant conjecturellement la série génératrice des excursions de Kreweras.
- (12) Expliquer pourquoi il est raisonnable de penser à ce stade que la fonction $F(t; x, y)$ est algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[T, t, x, y]$ tel que $P(F(t; x, y), t, x, y) = 0$.

Cependant, pour des questions de taille, nous n'allons pas pouvoir calculer explicitement ce polynôme P . C'est pourquoi, dans la section suivante, nous allons nous servir uniquement du polynôme candidat P_{x0} afin de *prouver* que $F(t; x, y)$ est en effet algébrique.

4. PREUVE DES CONJECTURES

(13) Vérifier à précision 20 (en t) l'équation du noyau **(K)** dans $\mathbb{Q}[x][[t]]$.

(14) Calculer l'unique solution dans $\mathbb{Q}[x, x^{-1}][[t]]$, notée $y_0(t, x)$, de l'équation $K(t; x, y_0(t, x)) = 0$.

Pour vérification, les 4 premiers termes de y_0 sont donnés par :

$$y_0(t, x) = t + \frac{1}{x}t^2 + \frac{1+x^3}{x^2}t^3 + \frac{1+3x^3}{x^3}t^4 + O(t^5).$$

En remplaçant $y = y_0$ dans l'équation du noyau **(K)** (cela fait sens, car la valuation de y_0 est strictement positive!) on obtient l'égalité suivante dans $\mathbb{Q}[x, x^{-1}][[t]]$:

$$(E) \quad 0 = xy_0 - xtF(t; x, 0) - y_0tF(t; 0, y_0).$$

(15) Vérifier que y_0 satisfait à l'équation **(E)** à précision 20 dans $\mathbb{Q}[x, x^{-1}][[t]]$.

L'égalité **(E)** et la symétrie de $F(t; x, y)$ en (x, y) impliquent que l'équation

$$(M) \quad xtG(t, x) + y_0tG(t, y_0) = xy_0.$$

admet la solution $G(t, x) = F(t; x, 0)$ dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$.

(16) Prouver que l'équation **(M)** admet exactement une solution dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$, à savoir $G(t, x) = F(t; x, 0)$.

(17) Montrer que le polynôme P_{x_0} deviné en Section 3 admet au plus une racine dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$.

(18) Montrer que les fractions rationnelles $R_1(U, x)$ et $R_2(U, x)$ définies par :

$$R_1(U, x) = \frac{U(1+U)(1+2U+U^2+U^2x)^2}{h(U, x)},$$

$$R_2(U, x) = \frac{(U^4x^2 + 2U^2(U+1)^2x + 1 + 4U + 6U^2 + 2U^3 - U^4)h(U, x)}{(1+U)^2(1+2U+U^2+U^2x)^4},$$

avec

$$h(U, x) = U^6x^3 + 3U^4(U+1)^2x^2 + 3U^2(U+1)^4x + 1 + 6U + 15U^2 + 24U^3 + 27U^4 + 18U^5 + 5U^6,$$

vérifient les propriétés :

(i) $P_{x_0}(R_2(U, x), R_1(U, x), x) = 0$;

(ii) il existe une unique série formelle

$$U_0(t, x) = t + t^2 + (x+1)t^3 + (2x+5)t^4 + (2x^2+3x+9)t^5 + \dots$$

dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$ telle que $R_1(U_0, x) = t$ et $U_0(0, x) = 0$.

(19) En déduire que $H(t, x) := R_2(U_0(t, x), x)$ est l'unique racine dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$ de P_{x_0} .

(20) Prouver que cette racine $H(t, x)$ vérifie l'équation **(M)**.

(21) Conclure la preuve des conjectures sur l'algébricité.

(22) Prouver la formule trouvée en question **(3)**.

(23) Conjecturer puis prouver une forme close pour $f(n; 0, 1)$.