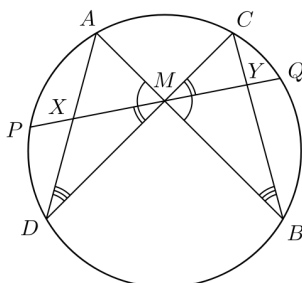


COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : TP 13

BASES DE GRÖBNER POUR LA GÉOMÉTRIE

Les calculs de bases de Gröbner sont parfois longs. Pour avoir une petite idée de ce qui se passe, il est utile en Maple de faire `infolevel[all] :=5` ; qui demande d'afficher des détails à toutes les procédures pour lesquelles cela a été prévu par le programmeur.



Le théorème du papillon est un exercice classique de géométrie Euclidienne. Soit M le milieu d'une corde PQ d'un cercle et soient AB et CD deux autres cordes passant par M ; AD et BC coupent PQ en X et Y respectivement. Il s'agit de montrer que M est aussi le milieu de XY .

Le but de l'exercice est d'utiliser les bases de Gröbner pour parvenir à la preuve sans trop de considérations géométriques. Sans perte de généralité, on pourra choisir de centrer le cercle en 0 , de lui donner un rayon 1 , de donner à M une abscisse nulle et d'imposer à PQ d'être horizontale. Il s'agit donc de construire un idéal de $\mathbb{K}_{\text{pol}} := \mathbb{Q}[x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D, x_P, y_P, x_Q, y_Q, x_X, y_X, x_Y, y_Y, x_M, y_M]$ codant la géométrie du problème, puis de tester si le polynôme $x_X + x_Y$ appartient (ou en toute rigueur s'il appartient à son radical).

- (1) Écrire une procédure prenant en argument un point et renvoyant un polynôme exprimant que ce point est sur le cercle, une autre prenant trois points et exprimant qu'ils sont alignés ;
- (2) Former un système mettant en équations le problème à l'aide de ces deux procédures et calculer une base de Gröbner G_1 de ce système pour un ordre du degré lexicographique inverse ;
- (3) Constater que $x_X + x_Y$ n'appartient pas à l'idéal engendré par G_1 , ni même à son radical, et donc que le théorème n'est pas vrai en toute généralité.

Comme souvent en géométrie, l'existence de cas dégénérés rend la propriété fautive ou mal posée. Il est cependant possible de tester la validité *générique* de la propriété en plaçant les paramètres du problème dans le corps de base. Ici, il s'agit donc de calculer la base dans l'anneau

$$\mathbb{K}_{\text{rat}} = \mathbb{Q}(y_M, y_A, y_C)[x_A, x_B, y_B, x_C, x_D, y_D, x_P, y_P, x_Q, y_Q, x_X, y_X, x_Y, y_Y, x_M]$$

plutôt que dans \mathbb{K}_{pol} .

- (4) Calculer une base de Gröbner G_2 de ce système pour un ordre du degré lexicographique inverse dans \mathbb{K}_{rat} et vérifier l'appartenance de la condition $x_X + x_Y$ à l'idéal engendré par G_2 dans \mathbb{K}_{rat} .

On peut ensuite identifier puis traiter séparément les cas de dégénérescence.

- (5) Factoriser les polynômes de G_1 de petit degré et en déduire des cas de dégénérescence à éviter. Poursuivre le calcul jusqu'à avoir identifié tous les cas dégénérés dans \mathbb{K}_{pol} .