

## COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : TP 12

### BASES DE GRÖBNER ET COLORIAGE DE GRAPHS



5			8		4		
	9			5	7	1	
4	7	1					
			3			4	
			6		7		
9	8				3	6	
	9			8			
	4			7		5	
		3	4	1	6	9	8

Un graphe est un nombre fini  $\mathcal{S}$  de sommets et  $\mathcal{A}$  d'arêtes, qui sont des paires de sommets. Deux sommets sont dits voisins s'ils sont reliés par une arête. Le *coloriage* d'un graphe avec  $m$  couleurs consiste à associer une couleur à chaque sommet du graphe de sorte que deux sommets voisins ne soient pas de la même couleur.

Le calcul peut être effectué par base de Gröbner. Pour forcer une variable  $X$  à ne pouvoir prendre que des valeurs parmi un ensemble fixé  $\mathcal{C} := \{c_1, \dots, c_m\}$ , il suffit de mettre dans un idéal le polynôme

$$P(X) = (X - c_1) \cdots (X - c_m).$$

Pour que deux variables  $X$  et  $Y$  ne puissent prendre que des valeurs différentes dans  $\mathcal{C}$ , on mettra

$$P(X), \quad P(Y), \quad Q(X, Y) := \frac{P(X) - P(Y)}{X - Y},$$

le dernier étant bien un polynôme. Ainsi, un problème de coloriage se code dans l'idéal engendré par

$$\{P(s) \mid s \in \mathcal{S}\} \cup \{Q(a) \mid a \in \mathcal{A}\}.$$

- (1) Écrire une procédure prenant en entrée une variable  $X$  et un entier  $m$  et renvoyant le polynôme  $P(X)$ . On pourra choisir  $c_i = i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
- (2) Écrire une procédure prenant en arguments  $X, Y$  et  $m$  et renvoyant  $Q(X, Y)$ .
- (3) Saisir les arêtes du graphe de voisinage des pays d'Amérique du Sud (ou récupérer les quelques lignes de Maple sur la page du cours) ;
- (4) Prouver par un calcul de base de Gröbner que la carte d'Amérique du Sud n'est pas coloriable avec 3 couleurs, mais qu'elle l'est avec 4. Calculer une solution possible.

Pour le Sudoku, les couleurs sont les chiffres de 1 à 9, les sommets du graphe sont les 81 cases d'une grille  $9 \times 9$ , et sont voisins deux sommets qui sont soit sur la même ligne, soit sur la même colonne, soit dans la même sous-grille de taille  $3 \times 3$ .

- (5) Procéder comme pour le coloriage de carte. (La grille peut être récupérée en Maple sur la page du cours).
- (6) Cette grille n'a qu'une solution. Vérifier qu'il est encore possible de résoudre en enlevant l'information sur la case en haut à gauche, et compter le nombre de solutions correspondantes.