

COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : TP 7

LES DÉCIMALES DE π EN BASE 16

La fascination pour les décimales de π a mené à de nombreuses expérimentations. En 1995, Simon Plouffe fait ainsi la découverte d'une formule étonnante :

$$(E) \quad \pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right).$$

Cette formule permet de calculer le n ème chiffre en base 16 de π (et même quelques chiffres à partir du n ème) sans calculer les chiffres précédents, avec peu de mémoire. Il est donc utile de comprendre comment découvrir des formules de ce type. Dans l'article écrit par Simon Plouffe avec David Bailey et Peter Borwein où (E) est présentée et prouvée, sa découverte est décrite comme le résultat de « divination inspirée et recherche intensive ». Le but du TP est de montrer comment une telle recherche peut être menée, et indiquer comment cette identité et des identités similaires peuvent aussi être prouvées automatiquement. S'il reste du temps, l'utilisation de cette formule pour le calcul de décimales lointaines pourra aussi être abordée.

1. DÉCOUVERTES AUTOMATIQUES

Le principe est simple, il s'agit de calculer numériquement un certain nombre de constantes et d'utiliser LLL pour trouver une relation linéaire entre elles.

- (1) Calculer avec cent décimales de précision les constantes

$$\Sigma_j := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{16^{-i}}{8i+j}, \quad j = 1, \dots, 8.$$

- (2) Utiliser l'algorithme LLL pour « découvrir » la relation (E).
(?IntegerRelations,LinearDependency)
- (3) Écrire une procédure prenant en argument une constante, une liste d'expressions, une précision, et renvoyant l'identité que suggère LLL utilisé sur cette constante et ces expressions évaluées à cette précision.
- (4) Utiliser cette procédure pour conjecturer des identités pour $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\arctan 2$, $\arctan 3$, $\sqrt{2} \arctan(1/\sqrt{2})$, $\sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})$.

D'autres identités peuvent être conjecturées avec des jeux de constantes différents.

- (5) Obtenir des conjectures pour les expressions de π^2 , $\ln 7$, $\ln^2 2$ en fonction des séries

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-ji}}{i^m}, \quad j = 1, \dots, 6, \quad m = 1, \dots, 5.$$

2. PREUVES

La partie difficile du travail se situe dans la découverte : trouver la bonne classe de constantes dans laquelle l'identité a des chances d'exister. La phase de preuve est plus facile et plusieurs preuves existent. La méthode utilisée ci-dessous suggère aussi les constantes qui ont des chances d'être obtenues.

- (6) Calculer une forme close pour les sommes

$$S_j(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^{8i+j}}{8i+j}, \quad j = 1, \dots, 8.$$

Pour aider Maple dans cette sommation, il pourra être utile de calculer d'abord les sommes des dérivées, puis d'intégrer.

- (7) En déduire des expressions symboliques pour les Σ_j , puis une preuve de (E). Les autres sommes trouvées en question (5) se prouvent de la même manière.

3. CALCUL RAPIDE DE DÉCIMALES

Le calcul se déroule de la même manière pour tous ces nombres se décomposant en combinaison linéaire à coefficients entiers de séries du type

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p(i) \cdot b^{-i}}{q(i)},$$

où p et q sont des polynômes à coefficients entiers. Les chiffres en base b de S à partir du N ième sont donnés par la partie fractionnaire de $b^N S$, que nous noterons $b^N S \bmod 1$. La somme se décompose pour donner

$$b^N S \bmod 1 = \sum_{i=0}^N \frac{p(i) \cdot b^{N-i} \bmod q(i)}{q(i)} + \sum_{i>N} \frac{p(i)}{b^{i-N} q(i)} \bmod 1.$$

La seconde somme converge géométriquement et peu de termes sont nécessaires pour obtenir des décimales. La première s'évalue rapidement en calculant chacun des sommants par exponentiation binaire.

- (8) Écrire une procédure prenant deux entiers m et k et calculant $16^m \bmod k$ par exponentiation binaire ;
 (9) Écrire deux procédures prenant deux entiers N et q , un polynôme p et sa variable k et renvoyant les premières décimales de

$$\sum_{i=0}^N \frac{q \cdot 16^{N-i} \bmod p(i)}{p(i)} \quad \text{et de} \quad \sum_{i>N} \frac{q}{16^{i-N} p(i)}.$$

- (10) Écrire enfin une procédure prenant en entrée des entiers N, b_1, \dots, b_8 et renvoyant les premières décimales en base 16 à partir de la N ième de

$$\sum_{i \geq 0} \frac{1}{16^i} \sum_{j=1}^8 \frac{b_j}{8i+j}.$$

Tester cette procédure sur π .

- (11) Estimer la complexité de ce calcul en fonction de N .