COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : TP 6

SINGULARITÉS D'UNE INTÉGRALE

Une version simplifiée d'un calcul de susceptibilité magnétique d'un modèle d'Ising a conduit des physiciens à s'interroger sur la position des singularités de la fonction

$$\phi_n(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} F_n(w,t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{où} \quad F_n(w,t) = \frac{1}{1 - x(w,t)^{n-1}x(w,T_{n-1}(t))},$$

$T_{n-1}(t)$ est un polynôme de Tchebychev de 1ère espèce (c'est un polynôme de degré $n-1$ défini par $\cos((n-1)t) = T_{n-1}(\cos(t))$) et

$$x(w,t) = \frac{2w}{1 - 2wt + \sqrt{(1-2wt)^2 - 4w^2}}.$$

Des arguments généraux permettent d'assurer que $\phi_n(w)$ satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux, c'est-à-dire de la forme

$$\text{(E)} \qquad a_k(w)\phi_n^{(k)}(w) + \cdots + a_0(w)\phi_n(w) = 0,$$

où les a_i sont des polynômes. La théorie de ces équations affirme alors que les singularités de $\phi_n(w)$ ne peuvent se trouver que parmi les racines du terme de tête $a_k(w)$ de (E).

Le but de ce TP est de calculer une telle équation dans le cas d'intérêt le plus simple, c'est-à-dire lorsque $n = 3$. La taille des calculs est déjà telle qu'il faudra souvent aider Maple dans les étapes intermédiaires. L'approche consiste à calculer un développement en série de $\phi_n(w)$, puis reconstruire (E) par un approximant de Padé-Hermite de $(\phi_n, \phi_n', \dots, \phi_n^{(k)})$.

Malheureusement, la taille des séries (et de leurs coefficients) sont telles que ni `seriestodiffeq`, ni `numapprox[hermite_pade]`, ne sont capables de calculer les approximants de Padé-Hermite dont nous aurons besoin. Pour parvenir au résultat :

(0) Sur la page du cours (http://algo.inria.fr/salvy/M1ENS), récupérer le fichier `gfun.mla` qui contient une version plus récente de `gfun` ; changer la variable globale `libname` pour qu'elle commence par le chemin où se trouve ce fichier, et vérifier que cela a fonctionné en testant la valeur de `gfun:-version()`.

1. Premiers essais d'approximation

Tout d'abord, il est possible de se faire une idée approximative de la position des singularités par un simple calcul d'approximant de Padé.

(1) Calculer un développement en série de $F_3(w,t)$ à l'ordre 15 par rapport à w ;

(2) intégrer terme à terme pour obtenir le développement de $\phi_3(w)$ (on ne demande pas de justifier l'interversion des signes somme et intégrale) ;

(3) calculer un approximant de Padé de cette série et évaluer numériquement la position des pôles de l'approximant.

La suite du TP consiste à trouver un polynôme à coefficients entiers dont ces pôles approchent les racines qui correspondent vraiment aux singularités de ϕ_3.

2. Développement en série à grande précision

Pour obtenir l'équation (E) que nous cherchons par un calcul d'approximant de Padé-Hermite, il est nécessaire de disposer d'une bonne centaine de termes du développement en série de $\phi_n(w)$ (cette valeur est trouvée en tâtonnant). Les méthodes directes utilisées dans la section précédente ne peuvent pas aller à de très grands ordres. Il faut aider Maple à développer F_3 par rapport à w, puis à intégrer terme à terme.

Pour développer F_n, l'idée est d'utiliser son caractère algébrique, qui entraîne l'existence d'une récurrence linéaire sur ses coefficients (les preuves et algorithmes seront présentés dans un cours ultérieur).

(4) Calculer un polynôme $P(w,t,y)$ tel que $P(w,t,F_3(w,t))=0$ (`?algfuntoalgeq`) ;

(5) en déduire une équation différentielle (`?algeqtodiffeq`), en précisant que la solution qui nous intéresse est celle qui satisfait $y(0)=1, y'(0)=0$;

(6) en déduire une récurrence sur les coefficients (`?diffeqtorec`), puis une procédure pour dérouler cette récurrence (`?rectoproc`, avec comme dans un TP précédent, l'option `evalfun` à positionner à `expand`) ;

(7) calculer enfin les 200 premiers coefficients du développement

$$F_3(w,t) = 1 + w^3 + (4t^2+4t-2)w^4 + \dots.$$

(8) Pour aider Maple à intégrer terme à terme cette série, calculer symboliquement l'intégrale

$$I_k = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,dt;$$

transformer la série ci-dessus en un polynôme en t à coefficients des polynômes en w (`?collect`), puis intégrer terme à terme et retransformer en série en w. On doit trouver les premiers termes

$$\phi_3(w) = 1 + w^3 + 11w^5 + 7w^6 + \dots.$$

3. Approximant de Padé-Hermite

(9) Calculer l'approximant de Padé-Hermite souhaité (`?seriestodiffeq`) ;

(10) En déduire une conjecture sur les positions des singularités de ϕ_3 ;

(11) Certaines des singularités trouvées à la question précédente ne sont pas vraiment des singularités des solutions ; on les appelle des *singularités apparentes*. Pour s'en débarrasser, calculer une équation différentielle d'ordre plus élevé (à l'aide de `gfun:-Parameters`), et calculer le pgcd des coefficients de tête. Ceci mène à une meilleure conjecture ;

(12) Pour conforter cette conjecture, calculer les pôles d'un approximant de Padé (40,40) de la série obtenue en question (8) et les afficher dans le plan complexe, avec les singularités de la question ci-dessus.