COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : TP 4

APPROXIMANTS DE PADÉ

L'objectif de ce TP est l'exploration des capacités d'approximation des approximants de Padé bien au-delà du disque de convergence d'une série formelle. Le point de départ est une équation différentielle :

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0. \tag{E}$$

La solution est bien entendu la fonction tangente $y(x) = \tan(x)$, sur laquelle on pourra s'appuyer pour estimer la qualité des approximations, mais le but du TP est de ne pas tenir compte de cette connaissance et de traiter le problème en partant de l'équation différentielle.

1. Développement en série

Dans un premier temps, sauter cette partie et utiliser pour S la série tronquée de $\tan(x)$ *à l'ordre 32.*

Le calcul du développement de la solution de (E) peut s'obtenir par itération de Newton.

(1) Déterminer l'équation différentielle linéaire à utiliser à chaque itération de Newton, et écrire une procédure permettant de la résoudre en série ;

(2) calculer ensuite par itération de Newton les 32 premiers coefficients. Soit S la série tronquée obtenue.

2. Approximation

(3) Calculer un approximant de Padé (15,16) de S (voir `?pade`). On appelle ensuite F la fraction obtenue.

(4) Tracer sur un même dessin les graphes de F, de S et de la fonction tangente, pour $-20 \leq x \leq 20$.

(5) Évaluer la qualité des approximations de tan par F et par S en $x = 1$, c'est-à-dire à l'intérieur du disque de convergence de S.

(6) Estimer la vitesse de convergence de la suite d'approximants de Padé diagonaux en $x = 1$.

(7) Effectuer les mêmes opérations en $x = 10$, c'est-à-dire *en dehors* du disque de convergence de la série.

Les approximants de Padé sont souvent employés pour localiser les singularités et les zéros de fonctions sur lesquelles on dispose de peu d'information.

(8) Calculer numériquement les racines du dénominateur de F, et comparer les plus petites en valeur absolue aux valeurs attendues.

(9) Faire de même pour le numérateur.

(10) Construire une animation permettant de visualiser la convergence des approximants diagonaux vers la tangente.

3. Validité des approximations

La qualité empirique des estimations obtenues par approximants de Padé est en général difficile à justifier rigoureusement. Dans le cas particulier de la tangente, cependant, il est possible de se ramener aux résultats de convergence pour les séries de Stieltjes.

(11) Calculer le début du développement en fraction continue de la tangente hyperbolique $\tanh(x)$ et deviner la forme générale des coefficients. (Une preuve de cette conjecture sera vue plus tard dans le cours ; le résultat dans ce cas particulier est dû à Lambert qui en avait déduit la première preuve de l'irrationalité de π).

(12) Analyser la convergence de cette fraction continue, puis conclure en observant les transformations liant les approximants de Padé de tan et ceux de tanh.