COURS DE CALCUL FORMEL EN M1: TP 2

CALCUL NUMÉRIQUE DE QUELQUES SOMMES

L'objectif de ce TP est l'utilisation de méthodes d'accélération de convergence, ainsi que de récurrences, pour l'évaluation numérique de sommes. L'exemple principal est

$$S := \lim_{N\to\infty} S_N \qquad \text{où} \qquad S_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

(1) Estimer l'ordre de grandeur du nombre de termes à utiliser pour calculer 30 décimales de la somme *sans* accélération de convergence. (Utiliser le caractère alterné de la somme).
(2) Calculer les trente premières décimales de S_{2^m} pour $m = 1, \ldots, 10$ et en déduire une première approximation de S. Estimer le nombre de décimales de S ainsi obtenu.
(3) Appliquer une méthode d'accélération de convergence linéaire et estimer le nombre de décimales obtenu.

Pour obtenir encore plus de décimales par cette méthode, il faut pouvoir évaluer S_{2^m} pour $m > 10$ en un temps raisonnable.

(4) Calculer exactement $S_0, \ldots, S_{100}$.
(5) Conjecturer une récurrence pour les valeurs de S_N à l'aide de `gfun[listtorec]`. (L'algorithme utilisé sera présenté plus tard dans le cours.)
(6) Traduire cette récurrence en une procédure permettant d'évaluer numériquement S_N (avec la procédure `gfun[rectoproc]` et son option `evalfun`).
(7) Conforter la conjecture en vérifiant que cette procédure donne la bonne valeur de S_{200}.
(8) Utiliser la procédure pour calculer S_{2^m} pour m jusqu'à 15.
(9) Estimer le temps que prendrait le calcul des trente premières décimales de S en utilisant la valeur de N obtenue à la question (1) et la procédure de la question (6).
(10) Appliquer alors une accélération de convergence linéaire comme en question (3).
(11) À l'aide de la valeur ainsi obtenue, il est également possible de conjecturer *une forme close* pour S. Pour cela, utiliser la fonction `identify` (dont le principe sera vu dans un cours suivant). Pour aider `identify`, il faut exploiter (par l'option `BasisSumConst`) le fait que la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

admet une expression simple, que Maple peut calculer, et dont une combinaison linéaire avec S a une forme simple.

Finalement, ce calcul a permis d'obtenir suffisamment de décimales pour arriver à la conjecture suivante

$$S = \frac{1}{4}\pi^2 \ln(2) - \frac{5}{8}\zeta(3).$$

Les mêmes techniques permettent de traiter d'autres sommes de façon très similaire, par exemple

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}.$$

Il faut toutefois ajuster l'extrapolation pour la dernière.

Des preuves de ces identités existent[1], mais aucune n'est vraiment simple.

[1] R. Sitaramachandrarao. A formula of S. Ramanujan, Journal of Number Theory 25 (1987), no. 1, 1–19.
P. Flajolet and B. Salvy, Euler sums and contour integral representations, Experimental Mathematics 7 (1998), no. 1, 15–35.