COURS DE CALCUL FORMEL EN M1: TP 1

COEFFICIENTS DE $(\sqrt{X^2-1})^{(N)}$

L'objectif de ce TP est double : d'une part il s'agit d'effectuer des premiers pas en Maple en alternant manipulations simples et recherches dans l'aide en ligne ; d'autre part, il montre comment utiliser le calcul formel pour conjecturer puis prouver une formule. L'exemple traité est celui de la dérivée $n$ième de $\sqrt{x^2-1}$.

(1) Calculer les dix premières dérivées de $\sqrt{x^2-1}$ et observer qu'elles sont de la forme

$$\frac{d^n}{dx^n}\sqrt{x^2-1} = \frac{P_n(x)}{(x^2-1)^{\alpha_n}}, \tag{E}$$

où P_n est un polynôme. Conjecturer les valeurs du degré de P_n et de α_n.

Dans la suite, on se concentrera sur le cas où n est un entier pair, le cas des valeurs impaires se traite de manière similaire.

(2) Calculer le polynôme P_{100}.

(3) Conjecturer une récurrence pour les valeurs des coefficients de P_{100} (à l'aide de la fonction `seriestorec` du package `gfun`). L'algorithme utilisé sera présenté plus tard dans le cours.

(4) Factoriser les coefficients de cette récurrence, et en déduire une récurrence plausible pour les coefficients de P_n pour n pair arbitraire.

(5) Résoudre cette récurrence.

(6) Il reste à déterminer les conditions initiales $P_n(0)$. Pour cela, à nouveau, calculer les premières valeurs, conjecturer une récurrence et la résoudre.

(7) Combiner ces conditions initiales avec les valeurs trouvées plus tôt pour donner une formule plausible pour l'équation (E) lorsque n est pair.

(8) Utiliser le système pour prouver cette formule par récurrence.