

# COURS DE CALCUL FORMEL EN M1 : PARTIEL

## UNE MARCHE ALÉATOIRE BIAISÉE

RÉSUMÉ. Une mouche part de l'origine de  $\mathbb{Z}^2$ . À chaque étape, elle saute d'un pas vers le nord ou le sud avec probabilité  $1/4$ , vers l'est avec probabilité  $1/4 + c$  et vers l'ouest avec probabilité  $1/4 - c$ . On étudie la probabilité qu'elle repasse par l'origine lors de ses déplacements.

*Des sessions Maple répondant aux questions ci-dessous, avec des explications, sont à renvoyer à Alin.Bostan@inria.fr et Bruno.Salvy@inria.fr avant le 10 janvier.*

Si  $p(c)$  est la probabilité de repasser par l'origine, la probabilité d'y repasser exactement  $k$  fois a pour valeur  $p(c)^k(1 - p(c))$ . L'espérance du nombre de repassages est donc

$$E(c) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(c)^k(1 - p(c)) = \frac{p(c)}{1 - p(c)}.$$

Par ailleurs, si  $q_n(c)$  est la probabilité d'être à l'origine à l'étape  $2n$ , cette espérance s'écrit aussi comme  $E(c) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(c)$ , qui est plus facile à calculer et donne ainsi un accès à  $p(c)$ .

### 1. DÉRIVE FIXÉE

Dans cette partie,  $c$  est fixé à la valeur  $1/10$ .

- (1) Écrire une procédure prenant en entrée  $i, j, n$  et  $c$  et calculant la probabilité d'arriver en  $(i, j)$  à l'étape  $n$  en ramenant cette probabilité à celles d'atteindre chacun des 4 voisins à l'étape  $n - 1$ .
- (2) Utiliser cette procédure pour calculer numériquement l'espérance  $e_n(c)$  du nombre de passages par l'origine lors des  $2n$  premières étapes, pour  $n = 1, \dots, 100$  et  $c = 1/10$ . Par exemple,  $e_1(1/10) \approx 0.2300$ ,  $e_2(1/10) \approx 0.3487$ ,  $e_3(1/10) \approx 0.4244$ . En déduire une estimation de  $p(1/10)$ , probabilité de repasser par l'origine pour  $c = 1/10$ .
- (3) Obtenir une vingtaine de décimales de cette valeur par une technique d'accélération de convergence.
- (4) Utiliser les valeurs exactes des  $e_n(1/10)$  pour  $n = 1, \dots, 20$  pour conjecturer une récurrence satisfaite par ces nombres.
- (5) Utiliser cette récurrence pour calculer  $e_n(1/10)$  pour  $n = 1000, 2000, 3000$  et en déduire une estimation des 50 premières décimales de  $p(1/10)$ .

### 2. AJUSTEMENT DE LA DÉRIVE

Dans cette partie, la question est de déterminer  $c$  pour que  $p(c) = 1/2$ .

- (6) Conjecturer une récurrence pour la famille de polynômes  $e_n(c)$ , avec  $c$  variable. Vérifier que cette conjecture coïncide avec celle de la question (4) lorsque  $c = 1/10$ .
- (7) Utiliser cette récurrence et `fsolve` pour calculer les valeurs de  $c_n$  tel que  $e_n(c_n) = 1$  pour  $n \in \{2^5, 2^6, 2^7\}$ .
- (8) Conjecturer comme en question (6) une récurrence linéaire pour la famille des dérivées  $e'_n(c)$ .
- (9) Écrire une procédure qui résolve  $e_n(c_n) = 1$  par itération de Newton en utilisant ces deux récurrences.
- (10) Calculer  $c_n$  pour  $n = 1000, 2000, 4000$  et en déduire une estimation des 30 premières décimales de la valeur  $c_\infty$  telle que la probabilité de repassage par l'origine soit exactement  $p(c_\infty) = 1/2$ .

### 3. PREUVES ET FONCTIONS SPÉCIALES

Il s'agit maintenant de prouver ces calculs qui reposent sur des récurrences conjecturées et des passages à la limite empiriques. Si  $k$  est le nombre de pas vers l'est, alors nécessairement, le trajet effectué à comporté  $k$  pas vers l'ouest et les  $2n - 2k$  restants sont pour moitié des pas vers le nord et pour moitié des pas vers le sud. En tenant compte de tous les choix possibles, la probabilité s'écrit donc

$$q_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} p_E^k p_O^k \binom{2n-2k}{n-k} p_N^{n-k} p_S^{n-k},$$

où  $p_E, p_O, p_N, p_S$  désignent les probabilités des pas est, ouest, nord, sud. On simplifiera les calculs en posant  $p_{NS}^2 = p_N p_S$  et  $p_{EO}^2 = p_E p_O$ .

- (11) Utiliser l'algorithme de Zeilberger pour calculer une récurrence satisfaite par  $q_n$ .
- (12) En déduire une récurrence satisfaite par  $e_n$  et vérifier que cette récurrence redonne la conjecture de la question (6) lorsque  $p_{NS} = 1/4$ ,  $p_{EO} = \sqrt{1/16 - c^2}$ .

Comme  $0 \leq q_n \leq 1$ , la série génératrice  $Q(z) = \sum_{n \geq 0} q_n z^n$  a un rayon de convergence au moins 1. On s'intéresse maintenant à sa valeur en 1, qui doit redonner l'espérance  $E$  de la première partie. Cette phase du calcul nécessite d'aider Maple à contourner certains des bugs de son solveur d'équations différentielles.

- (13) Calculer une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 satisfaite par  $Q(z)$ .
- (14) Calculer la solution générale de cette équation différentielle, c'est-à-dire sans tenir compte des conditions initiales qui vont être traitées dans les questions suivantes.
- (15) Exprimer ensuite cette solution en termes de séries hypergéométriques.

La série hypergéométrique de Gauss est définie par

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} \middle| t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{t^n}{n!}, \quad (x)_n = x(x+1) \cdots (x+n-1).$$

Son rayon de convergence est 1 et elle ne converge en 1 que si  $\Re(c - a - b) > 0$ .

- (16) Utiliser le comportement de  $Q$  au voisinage de l'origine, et en particulier son caractère analytique, pour déterminer son expression en terme de séries hypergéométriques.
- (17) Montrer que l'argument de la série hypergéométrique reste dans le disque de convergence pour  $0 \leq z \leq 1$ , sauf s'il n'y a pas de dérive, c'est-à-dire  $p_E = p_O$  et  $p_N = p_S$ .
- (18) En déduire une formule pour  $p(c)$ .
- (19) Calculer alors 500 décimales de  $p(1/10)$ , et de  $c_\infty$ .