

UPMC, Master Informatique STL-M2
Analyse d'algorithmes
Devoir à rendre le 1er Décembre 2004

PROBLÈME I

On utilise ici des symboles constants pour un langage $\mathcal{L}$, sa série génératrice ordinaire $L(z)$, et la suite (l_n) des coefficients correspondants.

Soit $\mathcal{A} = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres. On considère les langages suivants:

- $\mathcal{W} = \{a, b\}^*$ est le langage de tous les mots;
- $\mathcal{E}$ est le langage des mots contenant autant de a que de b : $\mathcal{E} = \{\epsilon, ab, ba, aabb, bbaa, abab, \dots\}$;
- $\mathcal{P}$ est le sous ensemble des mots w de E tels que dans tout préfixe de w le nombre de a est toujours supérieur ou égal au nombre de b : $\mathcal{P} = \{\epsilon, ab, aabb, abab, \dots\}$;
- $\mathcal{Q}$ est le langage obtenu à partir de $\mathcal{P}$ en échangeant le rôle des lettres a et b .

On pourra représenter un mot par une ligne polygonale partant de $(0,0)$, la lettre a étant codée par l'ajout du vecteur $(1,1)$ et la lettre b par l'ajout de $(1,-1)$.

Dans la suite il n'est pas nécessaire de détailler les calculs intermédiaires et on peut s'appuyer sur un système de calcul formel pour l'obtention des résultats.

Q1. Justifier que le langage $\mathcal{P}$ vérifie l'équation $\mathcal{P} = \text{Seq}(a \cdot \mathcal{P} \cdot b)$. En déduire $P(z)$.

Montrer que pour toute série $f(z)$, $[z^{2n}]f(z^2) = [z^n]f(z)$. Expliciter le coefficient $P_{2n} = [z^{2n}]P(z)$.

Q2. Montrer que $\mathcal{E} = \text{Seq}((a \cdot \mathcal{P} \cdot b) \cup (b \cdot \mathcal{Q} \cdot a))$ et en déduire $E(z)$ ainsi que E_{2n} . Évaluer exactement et estimer asymptotiquement le quotient P_{2n}/E_{2n} .

Donner une interprétation de ce quotient dans le cadre d'un dépouillement de scrutin : deux candidats A et B sont en lice, et lors du dépouillement, la lettre a (resp. b) correspond à un bulletin de vote en faveur du candidat A (resp. B).

Q3. Soit $E_{n,k}$ le nombre de mots de $\mathcal{E}_n$ ayant exactement k préfixes (de longueur entre 1 et n) qui sont dans $\mathcal{E}$, et $E(z, u) = \sum_{n,k} E_{n,k} z^n u^k$. (Graphiquement, il s'agit des lignes polygonales touchant k fois l'axe horizontal.)

Montrer que $E(z, u) = 1 / (1 - uz^2(P(z) + Q(z)))$.

Exprimer, en fonction de $E(z, u)$, l'espérance μ_{2n} du nombre de fois où les deux candidats sont à égalité au cours du dépouillement, sachant qu'ils recueillent finalement un même nombre de bulletins.

Donner un équivalent asymptotique de μ_{2n} en utilisant d'une part les expressions exactes des coefficients, et d'autre part l'analyse de singularité.

Q4. Pour un scrutin particulier $w = w_1 \cdots w_{2n} \in \mathcal{E}$, soit $\chi[w]$ la valeur du premier indice j avec $0 \leq j < 2n$ tel que $w_1 \cdots w_{j+1}$ comporte plus de b que de a ; on pose $\chi[w] = 2n$ si un tel indice n'existe pas. On mesure donc la durée de la période initiale où le nombre de bulletins pour A domine le nombre de bulletins pour B (le candidat A est en tête). Par exemple, $\chi[baab] = 0$, $\chi[aabbbba] = 4$, $\chi[aaababbb] = 8$. Soit $F(z, v)$ la série bivariée qui mesure le paramètre χ :

$$F(z, v) := \sum_{w \in \mathcal{E}} z^{|w|} v^{\chi(w)}.$$

Déterminer l'expression de $F(z, v)$ et en déduire la valeur exacte et asymptotique de la durée moyenne de la période initiale pendant laquelle le candidat A est en tête.

PROBLÈME II

Q1. Le nombre de manières de placer les n éléments $\{1, 2, \dots, n\}$ dans k urnes distinguées, avec chaque urne contenant un nombre pair de boules (possiblement égal à 0), vaut

$$G_{n,k} = n! [z^n] (\cosh z)^k,$$

où $\cosh(z) = (e^z + e^{-z})/2$.

Montrer que $(\cosh z)^k$ se développe en une combinaison linéaire finie d'exponentielles de la forme $e^{\alpha z}$. Exprimer $G_{n,k}$.

Q2. Soit $f(z) = \sum_n f_n z^n / n!$ une série génératrice exponentielle, et $\tilde{f}(z) = \sum_n f_n z^n$ la série ordinaire correspondante. Déterminer $\tilde{f}(z)$ lorsque $f(z) = e^{\alpha z}$, $f(z) = \cosh(z)$ et $f(z) = ze^z$.

Montrer que la transformation $f \mapsto \tilde{f}$ est linéaire.

Déterminer la série génératrice ordinaire $\tilde{f}(z)$ correspondant à $f(z) = (\cosh(z))^k$ sous forme de décomposition en éléments simples.

Obtenir un équivalent asymptotique de $G_{2n,k}$ lorsque k est fixé et n tend vers l'infini.

Q3. Deux cavités appelées A et B contenant au total k particules (distinctes) sont en communication par un trou très fin. A chaque seconde, une particule passe de A à B ou inversement. Au temps 0, la cavité A est vide et la cavité B est pleine.

Donner la série génératrice des fonctions de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, k\}$ telles que l'image inverse de tout $j \in [1, k]$ soit de taille paire.

On postule que toutes les évolutions possibles en n étapes sont équiprobables. Relier le problème aux questions précédentes.

Justifier par la méthode de votre choix que la série génératrice exponentielle de toutes ces évolutions vaut e^{kz} .

Déterminer un équivalent asymptotique en grand temps de la probabilité que la cavité A soit vide au bout de n étapes.

Q4. La série génératrice exponentielle des évolutions qui aboutissent à avoir r particules dans la cavité A vaut $\binom{k}{r} (\cosh z)^{k-r} (\sinh z)^r$. Justifier ce résultat.

Déterminer les deux premiers termes du développement asymptotique ($n \rightarrow +\infty$) de l'espérance E_n de la variable aléatoire représentant le nombre d'atomes contenus dans l'urne A au temps n ; déterminer ainsi à quelle vitesse on se "rapproche de l'équilibre". (Suggestion: former une série bivariée où u marque les différentes valeurs possible de r .)