ASYMPTOTIQUE ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Philippe Flajolet

Cours de remplacement du 17 novembre 2005

Version provisoire du 16 novembre 2005

Ces notes télégraphiques font le point de quelques notions de base concernant les fonctions analytiques et destinées à l'**analyse asymptotique des coefficients de fonctions génératrices**. On pourra consulter pour plus de détail le manuscrit *Analytic Combinatorics*, chapitre IV, ainsi que le début du chapitre VI pour l'analyse de singularité.

On rappelle que si R est le rayon de convergence d'une série $f(z) = \sum_n f_n z^n$, alors les coefficients satisfont une formule du type

$$f_n = \left(\frac{1}{R}\right)^n \theta(n),$$

où $\theta(n)$ est un facteur subexponentiel au sens où

$$\limsup |\theta(n)|^{1/n} = 1.$$

En particulier, le taux de croissance exponentiel en R^{-n} est donné par le rayon de convergence de la série.

Il est donc nécessaire de disposer de méthodes permettant de déterminer R ainsi que la fonction θ. Ces méthodes se fondent sur l'**analyse complexe** et sur la théorie des **fonctions analytiques**.

1. Fonctions analytiques

La plupart des fonctions usuelles peuvent être étendues à certaines régions du domaine complexe. C'est le cas des polynômes, des fractions rationnelles, par les règles habituelles des opérations sur les complexes. Si $z = x + iy$ (avec $i = \sqrt{-1}$), on définit

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Pour la racine carrée, si $z = \rho e^{i\phi}$ avec $\theta \in (-\pi, \pi)$, on prend

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\phi/2}.$$

Le domaine de définition doit être limité au plan complexe coupé le long de l'axe négatif. Pour le logarithme, on procède de même avec

$$\log z = \log \rho + i\phi.$$

Notons que ces fonctions sont celles qui apparaissent dans la traduction des constructions combinatoires en séries génératrices.

Dans ce qui suit, Ω désignera un ouvert du plan complexe, pris en général connexe.

Définition 1. *Soit $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. On dit que f est analytique en $z_0 \in \Omega$ si elle est représentée dans un voisinage de z_0 par une série convergente*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z - z_0)^n.$$

On dit que f est analytique sur Ω si f est analytique en tout point de Ω.

(Par la topologie générale, si K est un compact $\subset \Omega$, alors K peut être recouvert par un nombre fini de disques et f est ainsi représentable par un nombre fini de développements autour d'un nombre fini de points.)

Exemples : (a) un polynôme est analytique (réarranger les termes ; on vérifie la formule de Taylor) ; (b) une fonction rationnelle $f = P/Q$ est analytique sauf en les zéros du dénominateur Q (=les pôles) ; (c) $1/(1-z)$ est analytique en tout $z_0 \neq 0$: le calcul peut être rendu explicite ; (d) $\exp(z)$ est analytique dans tout $\mathbb{C}$ (calcul encore explicite possible) ; (e) $\log z$ est analytique dans le plan coupé.

L'analyticité est essentielle pour la combinatoire, puis que celle-ci nous fournit a priori des séries entières. Mais elles n'est pas très pratique pour déterminer les domaines d'analyticité et les rayons de convergence. On a besoin pour cela d'une vision différente.

Définition 2. *Une fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ est différentiable*[1] *en $z_0 \in \Omega$ si la limite suivante existe*

$$\lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{C}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}.$$

On note alors cette limite $f'(z_0)$ et on l'appelle la dérivée de f en z_0. On dit que f est différentiable sur Ω si f est différentiable en tout point $z_0 \in \Omega$.

Exemples : Les polynômes, fractions rationnelles, logarithme, exponentielle sont différentiables (avec les réserves usuelles). En exercice, on peut faire le calcul explicitement pour $\exp(z)$. Les règles usuelles de dérivation des sommes, produits, quotients, et compositions de fonctions s'appliquent. Les preuves généralisent le classique calcul de $\frac{\Delta f}{\Delta z}$.

Théorème 1. *$f(z)$ est analytique dans Ω si et seulement si $f(z)$ est différentiable dans Ω.*

Corollaire. *Les fonctions analytiques sont closes par somme, produit, quotient (si le dividende ne s'annule pas !), racine carrées et logarithmes (avec la condition d´éviter de tourner autour de 0), exponentielle.*

Par exemple, on voit de la sorte que

$$\sqrt{\log\left(e^{e^z} + 2\right) + z}$$

est analytique en 0. On peut traiter de même des expressions arbitrairement compliquées telles que la combinatoire ne se prive pas d'en fournir.

[1] On dit aussi $\mathbb{C}$-différentiable ou *holomorphe*.

2. Intégrales, fonctions méromorphes, et résidus

On définit l'intégrale le long d'un chemin, soit $\int_\gamma f$, en paramétrant le chemin (par un $t \in [0,1]$) et en se ramenant à des intégrales réelles usuelles : prendre $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ et $f(z) = f(x+iy) = A(x,y) + iB(x,y)$; alors

$$\int f(z)\,dz := \int_0^1 (A(x(t),y(t)) + iB(x(t),y(t))) \cdot (x'(t) + iy'(t))\,dt.$$

Théorème 2. *Si f est analytique dans Ω et $\gamma \subset \Omega$ est un chemin fermé qui se contracte à un point dans Ω, alors*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Preuve vague : Si f est analytique elle possède localement une primitive obtenue en intégrant terme à terme son développement. La variation le long d'un chemin fermé de chaque terme est nulle. Pour un domaine plus grand que celui d'un seul développement en série entière, on décompose le domaine en cellules.

Une autre façon de dire les chose est que $\int_A^B f$ ne dépend pas du chemin reliant A à B (pourvu qu'une suite continue de déformations permette de passer d'un chemin à l'autre).

Définition 3. *La fonction f est dite méromorphe en z_0 si dans un voisinage de z_0, cette fonction f est représentable par $f(z) = g(z)/h(z)$, avec g, h analytiques en z_0.*

Si $f(z_0) \neq 0$ et $g(z_0)$ a un zéro d'ordre m, alors on a la représentation locale

$$f(z) = \sum_{n \geq -m} c_n (z - z_0)^n,$$

par simple division de séries. On dit que $f(z)$ possède un pôle d'ordre m en z_0.

Définition 4. *La quantité c_{-1} s'appelle le* résidu *de f en z_0. On le note* $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

Dans ce qui suit les courbes fermées sont orientées positivement. Voici le fameux **Théorème des résidus**.

Théorème 3. *Soit f méromorphe dans Ω et γ est une courbe simple de Ω contractable à un point (dans Ω). Alors l'intégrale de f est égale à la somme des résidus en les poles de f intérieurs à γ :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{\zeta \text{ pole}} \operatorname{Res}(f; \zeta).$$

Preuve vague : Soit un pôle en 0. On intègre terme à terme le développement méromorphe. L'intégrale des termes $z^{-m}, \ldots, z^{-2}, z^0, z^1, \ldots$ est nulle. On tombe alors sur sur

$$\int \frac{dz}{z} = 2i\pi,$$

qui se vérifie en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$. Pour un domaine plus grand et possiblement plusieurs pôles, on décompose le domaine en petites cellules.

Corollaire : *Les coefficients de f s'obtiennent par intégration :*

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{2i\pi} f(z)\,\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

C'est la non moins fameuse **Formule des coefficients de Cauchy**.

3. Croissance exponentielle et singularités

Soit un domaine Ω limité par une courbe simple $(\partial\Omega)$ à l'intérieur de laquelle f est analytique. Un point σ sur le bord $(\partial\Omega)$ est une **singularité** s'il n'est pas possible de définir une fonction analytique dans un voisinage $\Omega^\star$ de σ qui coincide avec f sur $\Omega \cap \Omega^\star$. En bref, en une singularité, on ne peut plus étendre la fonction analytiquement.

Exemples : $1/(1-z)$ est singulière en $z = 1$ (par rapport au disque unité) ; $\sqrt{1-z}$, $\log(1-z)$ sont singulières en $z = 1$ (par rapport au disque unité encore) ;

Théorème 4. *Une fonction analytique en 0 possède toujours au moins une singularité sur le bord de son disque de convergence.*

[Pringsheim] Pour une fonction à coefficients non négatifs, le rayon de convergence est une singularité.

Preuve de la forme faible : D'abord, par réarrangement de séries une fonction est toujours analytique à l'intérieur du disque de convergence de la série qui la représente en 0. Donc, il n'y a pas de singularités à l'intérieur. Ensuite, supposons par l'absurde qu'il n'y en ait pas sur le bord. Alors on applique la formule des coefficients de Cauchy en intégrant sur un cercle plus grand que le rayon de convergence. Par majoration triviale, les coefficients seraient trop petit et la série représentant f convergerait plus qu'elle n'est suposée le faire. Contradiction ! (Pour la version forte de Pringsheim, voir les notes.)

Exemples : $\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4z})$ possède une singularité en $z = \frac{1}{4}$ (nombres de Catalan).

• La fonction génératrice des arbres unaires binaires met en jeu $\sqrt{(1+z)(1-3z)}$ et a une singularité en $z = \frac{1}{3}$.

• La fonction $f(z) = 1/(2-e^z)$ a une singularité en $\log 2$, et ailleurs (surjections).

Exercice. Trouver le taux de croissance exponentielle des coefficients associés à

$$\mathcal{C} = Seq(Set_{\geq 1}(Set_{\geq 1}(\mathcal{Z}))), \qquad C(z) = \frac{1}{2 - e^{e^z - 1}}.$$

On doit obtenir $R = \log(1 + \log 2)$.

Grâce au dernier théorème, on sait enfin caractériser les rayons de convergence des séries :

Premier principe fondamental. *La position des singularités d'une fonction détermine le rayon de convergence de sa représentation en série, donc l'ordre de croissance exponentiel de ses coefficients.*

4. Analyse de singularité

On se limite ici à de brèves indications quant à l'énoncé donné au cours précédent, lequel avait été admis sous des conditions mystérieuses baptisées [SAC] :

Second principe fondamental. *La nature des singularités d'une fonction détermine le facteur subexponentiel de ses coefficients.*

4.1. **Fonctions rationnelles.**

On a déjà vu en interprétant la décomposition en élements simples que la position et la nature des pôles déterminait la forme asymptotique des coefficients.

On peut y revenir : on part de la formule intégrale pour les coefficients, prise le long d'un petit cercle autour de 0. On élargit le cercle graduellement ; on passe au dessus du ou des premiers pôles. On cueille le ou les résidus par le théorème des résidus.

4.2. **Fonctions méromorphes.**

Ça marche pareil que pour les fractions rationnelles dans la version analyse complexe.

Exemples. • Dérangements et leurs généralisations. On part de

$$[z^n]\frac{e^{-z}}{1-z} \sim [z^n]\frac{e^{-1}}{1-z} \sim e^{-1},$$

dáprès l'unique pôle en $z = 1$. Idem pour les doubles ou multiples dérangements :

$$[z^n]e^{-z-z^2/2}1 - z.$$

La probabilité que tous les cycles d'une permutations soient de longuer $> k$ vaut asymptotiquement e^{-H_k} (H_k le nombre harmonique).

• Soit S_n le nombre de surjections. On a

$$\frac{S_n}{n!} = [z^n]\frac{1}{2-e^z} \sim C(\log 2)^{-n}.$$

Noter qu'on utilise essentiellement le fait que le pole est simple. (Variante : on peut faire aussi par soustraction de singularités, ce qui peut être algorithmiquement plus plaisant.)

• Les alignements $1/(1 - \log(1 - z)^{-1})$.

• Exercice : le nombre de compositions en sommants qui sont des nombres premiers ?

4.3. **Analyse de singularité.** Ceci généralise grandement le cas rationnel et méromorphe. Dans ce qui suit on suppose $\alpha \notin \{0, -1, -2, \dots\}$.

• On commence par

$$[z^n](1-z)^{-\alpha} = \frac{1}{2i\pi} \int_H (1-z)^{-\alpha} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

On choisit pour H une boucle partant de $+\infty + i\epsilon$, passant à gauche de 1, puis revenant vers $+\infty - i\epsilon$. Ceci s'appelle un contour de Hankel. On dimensionne pour passer à distance $1/n$ du demi-axe $[1, +\infty[$. Tout se normalise convenablement lorsqu'on pose $z = 1 + t/n$:

$$dz \mapsto \frac{dt}{n}, \qquad z^{-n-1} \mapsto e^{-t}, \qquad (1-z)^{-\alpha} \mapsto \left(-\frac{t}{n}\right)^{-\alpha}.$$

On voit alors que

$$[z^n](1-z)^{-\alpha} \sim C_\alpha n^{\alpha-1},$$

où C_α est une intégrale fixe qui vaut en fait $1/\Gamma(\alpha)$. De même, on peut introduire des termes logarithmiques et obtenir :

$$\boxed{[z^n](1-z)^{-\alpha} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^k \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\log n)^k.}$$

• Le même type de calcul s'applique si $f(z)$ n'a qu'une singularité en $z = 1$, existe comme fonction analytique dans un disque indenté[2] de rayon plus grand que 1, et vérifie $f(z) = O\left((1-z)^{-\alpha}\right)$. On en déduit que son coefficient est $O(n^{\alpha-1})$. Ca fonctionne de même pour transférer des résultats en $o(.)$. De manière simplifiée, on a une deuxième règle :

$$\boxed{[z^n] o\left((1-z)^{-\alpha}\right) = o\left(n^{\alpha-1}\right).}$$

• On justifie de la sorte le théorème de transfer de la séance précédente. QED

EXAMPLES. Graphes 2-réguliers (EGF) :

$$G(z) = \frac{e^{-z/2-z^2/4}}{\sqrt{1-z}} \quad \text{implique} \quad [z^n]G(z) \sim e^{-3/4}\sqrt{\pi n}.$$

On retrouve ce quón sait des nombres harmoniques de série génératrice

$$\frac{1}{1-z} \log \frac{1}{1-z},$$

etc.

C'est là le procédé dit **analyse de singularité.**

---

[2]Voici donc les mystérieuses conditions [SAC].